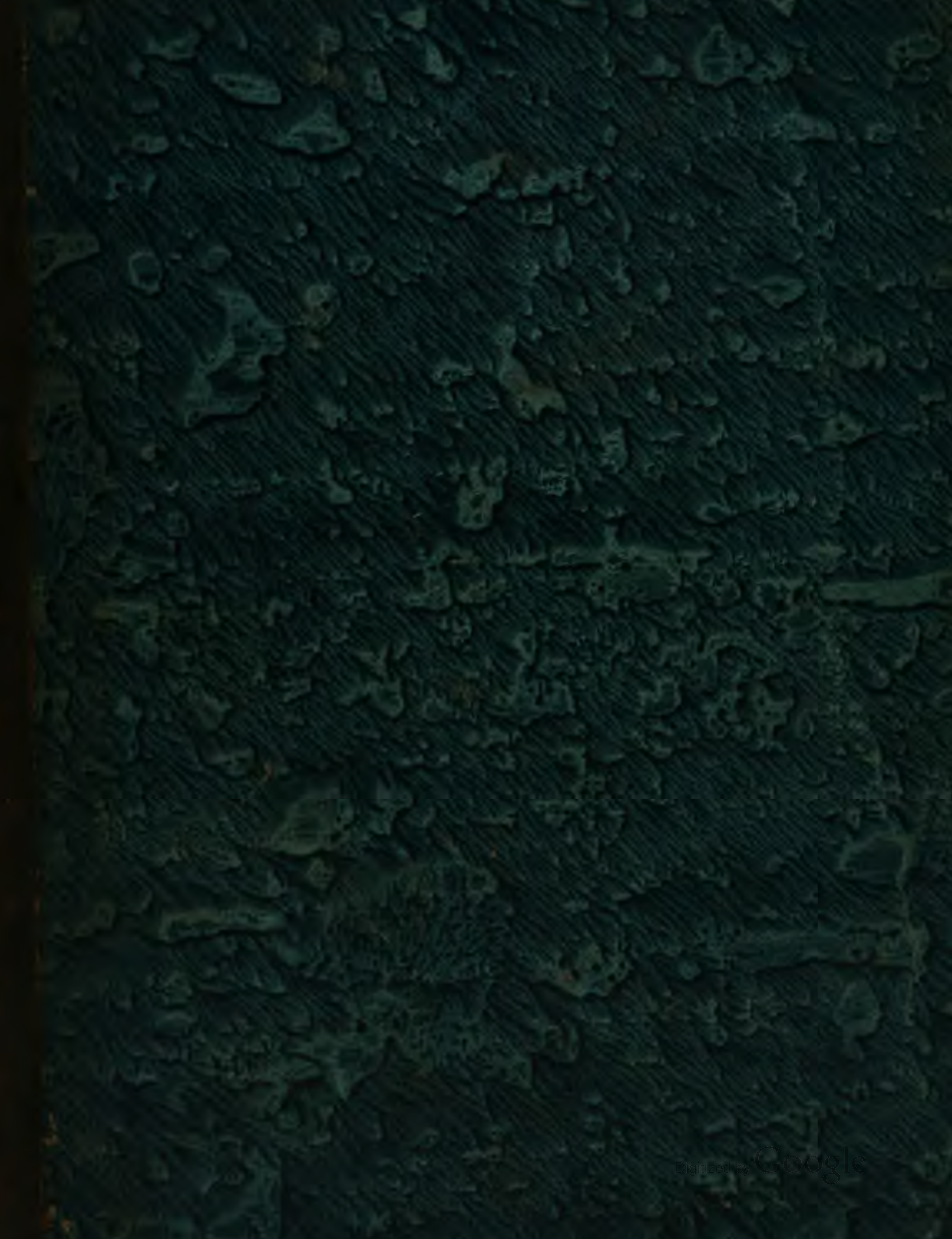






Offert à mon ami M. Girard
Ch. Dupin

DÉVELOPPEMENTS
DE
GÉOMÉTRIE.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

DÉVELOPPEMENTS

DE

GÉOMÉTRIE,

Avec des Applications à la stabilité des Vaisseaux, aux Déblais et Remblais, au Défilement, à l'Optique, etc.

POUR FAIRE SUITE

A LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ET

A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE M. MONGE:

PAR CH. DUPIN, *Membre de l'Académie Ionienne, Associé étranger de l'Institut royal de Naples, de l'Académie des Sciences de Turin; Capitaine du Génie Maritime.*

THÉORIE.

PARIS,

MME V^{E} COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.



A M. MONGE,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

CH. DUPIN.

MON ILLUSTRE MAÎTRE,

Je vous dédie mon premier Ouvrage dans un genre où je dois tout à vos leçons; vos encouragements m'ont engagé dans la carrière aplanie par vos travaux; vos avis, vos suffrages ont soutenu mes premiers pas, et j'ai pensé qu'avoir obtenu de vos mains la plus simple palme, c'était avoir remporté déjà un noble prix.

Dans les trop longues années qu'il m'a fallu passer en des contrées presque barbares, et si loin de mon pays, après ce qui tient aux affections de la nature, ce que je regrettais le plus, c'était l'amitié de ces hommes illustres, dont les préceptes bienveillants m'élevaient au-dessus de moi-même, et dont la présence était pour mon courage un aiguillon qui, chaque jour, ranimait mes forces facilement épuisées.

Cependant, malgré l'immense intervalle qui nous séparait, j'étais encore en présence de vous et de vos pairs; je charmais ma solitude en vous soumettant en idée mes travaux; je songeais à ce qu'ils devaient être pour mériter l'approbation de semblables juges, et, plein d'une ardeur toujours nouvelle, j'espérais que le temps et la répétition continue des mêmes efforts, rendraient enfin mes faibles ébauches moins indignes de vous être présentées.

Vous m'apprendrez si mes vœux et mes espérances n'étaient pas seulement une heureuse chimère, ou si les modèles qui fixaient incessamment mes regards, n'ont pas rehaussé quelques traits de ces copies, ou de ces imitations. Que si votre réponse et dès-lors la décision du public ne m'étaient pas entièrement défavorables, c'est à vous-même que j'en rapporterais l'honneur; et je vous dirais, comme cet Ancien à son mécène et son ami,

Quod spiro et placeo, si placeo, tuum est.

PRÉFACE.

Quoique cet ouvrage, divisé par Mémoires, semble annoncer plutôt des recherches scientifiques qu'un Traité élémentaire, cependant *c'est un Traité élémentaire sur la courbure des surfaces.* Nous avons mieux aimé développer plus longuement beaucoup de parties, pour leur donner plus de clarté. Le mérite de nos résultats en sera moins saillant. Mais notre méthode est plus utile ; et si nous rendons quelque service aux hommes à qui cet écrit est spécialement destiné, aux Ingénieurs, nous aurons atteint notre but.

Les progrès de la science ne sont vraiment fructueux, que quand ils amènent aussi le progrès des Traités élémentaires ; c'est par ces écrits que les conceptions nouvelles, réservées d'abord au petit nombre des esprits supérieurs, deviennent enfin des connaissances générales, et ramifient leurs bienfaits dans toutes les parties qui n'attendent qu'une application intelligente.

Présentons rapidement quelques aperçus nécessaires à saisir pour bien entrer dans l'esprit de cet ouvrage.

Les recherches qui font l'objet de ces Mémoires ont été commencées en 1805, et continuées en 1806 et 1807. Plusieurs des résultats auxquels elles ont conduit leur auteur se trouvent consignés dans la Correspondance polytechnique. Quelques

savans en ont donné ensuite des démonstrations très-dignes d'être étudiées, et pareillement consignées dans cet écrit périodique.

Long-temps après, lorsque l'auteur eut conçu l'idée de rendre son ouvrage de quelque utilité pour les élèves de l'École Polytechnique, ou des corps du Génie, il l'a recommencé entièrement, en cherchant à mettre plus d'ordre dans sa marche, et plus de simplicité dans un sujet toujours assez compliqué par lui-même.

Le principal objet de ces Mémoires est de développer la théorie de la courbure des surfaces, et de montrer à la fois par des applications nombreuses, prises dans les travaux des Services Publics, et l'utilité dont peut être cette même théorie, et les moyens généraux de s'en servir.

On a donc divisé cet ouvrage en deux parties, la théorie et les applications. Cinq Mémoires sont consacrés à la théorie, les trois premiers traitent de la courbure des surfaces considérée à partir d'un point unique, les deux autres considèrent cette courbure sur toute l'étendue des surfaces. Cette première partie que nous publions aujourd'hui forme un ouvrage complet.

On a constamment séparé les deux méthodes de la Géométrie pure ou rationnelle et de la Géométrie analytique; chacune d'elles peut parvenir aux mêmes résultats par les moyens qui lui sont propres; chacune a ses inconvénients et ses avantages : il faut connaître les uns et les autres pour

procéder dans tous les cas à la recherche de la vérité, par la voie la plus convenable.

Et d'ailleurs, si dans l'état actuel de la science, la Géométrie analytique semble avoir acquis une supériorité incontestable sur la Géométrie rationnelle, par la facilité et, en général, la rapidité de ses opérations; les considérations de cette dernière méthode ne sont pas moins nécessaires à quiconque veut descendre, des généralités de la science, aux applications usuelles des arts dont les travaux sont soumis à des lois mathématiques. Cette Géométrie est donc indispensable à tout Ingénieur.

Voilà pourquoi dans le premier Mémoire et dans le quatrième, avant de passer à la théorie analytique de la courbure des surfaces considérée d'abord à partir d'un seul point, et après sur toute l'étendue de ces surfaces, on a présenté par la simple Géométrie, tous les principes auxquels l'analyse a dû conduire ensuite. Nous suivrons constamment cette méthode.

Nous conseillerons donc à tous ceux qui se destinent aux Services Publics, de ne pas se borner aux méthodes analytiques, sans craindre par là de faire un double emploi de leur temps en parvenant deux fois aux mêmes résultats par deux routes différentes. Mais peut-être les analystes, beaucoup plus familiers avec les calculs qu'avec les considérations géométriques, feront-ils bien de commencer par lire les Mémoires d'analyse appliquée, dont on a, pour cette raison,

rendu la lecture indépendante des Mémoires de Géométrie pure.

La seconde partie est composée de quatre Mémoires : ce sont des applications des principes posés dans la première partie :

D'abord aux méthodes de la Géométrie descriptive, dans les questions où il s'agit de déterminer des grandeurs graphiques qui dépendent d'éléments du second ordre, c'est-à-dire, d'éléments de la courbure des lignes et des surfaces.

Ensuite à la stabilité des vaisseaux et à l'équilibre des corps flottants, en général, qu'on ramène à des considérations purement géométriques, au moyen des propriétés des centres de courbure des surfaces.

Troisièmement à la question des déblais et remblais déjà traitée par Monge, mais dans le cas seulement où les routes doivent être constamment rectilignes : nous avons supposé les routes tracées sur des surfaces quelconques, et cherché les lois qu'elles doivent suivre dans cette hypothèse, qui est à proprement parler le cas de la nature.

Enfin à l'optique, en faisant voir que la démonstration des beaux principes découverts par Malus sur les surfaces formées par les rayons réfléchis et réfractés, sur les lieux des images, etc., peut se déduire immédiatement des principes exposés dans la première partie de ces Développements.

Peut-être aussi joindrons-nous à ces divers sujets une

exposition des principales méthodes qui constituent la théorie du *Défilement*. Alors les Ingénieurs trouveraient réunis dans un seul volume, les applications les plus importantes que la Géométrie fournit aux travaux qu'ils dirigent.

Tel est le cadre dans lequel est circonscrit cet ouvrage.

Si les circonstances nous permettent de recueillir les matériaux que nous desirons, nous ferons précéder la seconde partie par un Précis historique des travaux faits en Géométrie par les anciens élèves de l'École Polytechnique. Déjà plusieurs de ces élèves ont péri, la tradition de ce qui leur appartient dans le perfectionnement de la science se perd de jour en jour; et d'autres qu'eux, peut-être, recueilleraient injustement le fruit de leurs veilles. Nous nous croirons trop heureux si nous parvenons à rendre aux hommes qui ne sont plus, comme aux hommes qui sont encore, la justice qui leur est due.

Avant de terminer ces notions préliminaires, nous croyons devoir témoigner toute notre reconnaissance aux Géomètres qui ont bien voulu nous accorder leurs conseils et quelquefois leurs encouragements, à Carnot, ce grand homme qu'il suffit de nommer, aux savants d'Italie et surtout à Paoli, qui nous ont éclairé sans paraître mettre de prix à leurs lumières, et qui croient que les beaux talents ne sont pas départis aux hommes supérieurs pour en accabler les hommes moins favorisés de la nature, mais pour leur faciliter une route toujours trop hérissée d'obstacles.

Enfin nous n'oublierons pas non plus nos anciens camarades de l'École Polytechnique, nos chers amis Augoyat (*) et Marestier (**), qui ont bien voulu relire nos manuscrits, en relever les inexactitudes, et nous faire retoucher les passages écrits d'une manière obscure ou peu rigoureuse. Loin de rougir de semblables services, nous éprouvons un vrai plaisir à les faire connaître, et nous voudrions que cet exemple, plus généralement suivi, rendît aussi les vrais aristarques et plus faciles et plus communs.

(*) Capitaine au Corps du Génie militaire et l'un des fondateurs de l'Académie Ionienne.

(**) Ingénieur de la Marine française, ancien Chef de Division de l'École Polytechnique.

INSTITUT DE FRANCE.

CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

RAPPORT

FAIT PAR UNE COMMISSION

COMPOSÉE

DE MM. CARNOT, MONGE ET POISSON,

SUR LES TROIS PREMIERS MÉMOIRES

DE GÉOMÉTRIE ET D'ANALYSE

Présentés par CH. DUPIN, *dans la Séance du 14 décembre 1812.*

M. DUPIN se propose de publier un ouvrage qui aura pour titre : DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE RATIONNELLE ET ANALYTIQUE, *pour servir de suite aux Traités de Géométrie Descriptive et de Géométrie Analytique de M. Monge.*

Cet ouvrage sera le recueil de plusieurs Mémoires que l'auteur a composés sur des questions purement théoriques, et sur d'autres problêmes qui trouvent des applications utiles dans les arts, et particulièrement dans le service des Ingénieurs. Avant de le faire paraître, il desire que les différentes

parties de son travail soient soumises au jugement de la Classe à laquelle il a présenté, dans une de ses dernières séances, trois de ses Mémoires qu'elle a renvoyés à notre examen. Les questions qu'il y a traitées, sont relatives aux courbures des surfaces. *Son objet principal est de rendre cette théorie plus élémentaire, et surtout d'un usage plus facile dans les nombreuses applications dont elle est susceptible.* Ce qu'il importe en effet, dans les arts, c'est de pouvoir ramener la solution des problèmes à des constructions graphiques faciles à exécuter, et c'est en cela que les procédés simples et uniformes de la Géométrie Descriptive sont d'une si grande utilité à toutes les classes d'Ingénieurs.

Dans le premier de ces trois Mémoires, M. Dupin rappelle tous les théorêmes connus sur la courbure des surfaces, et sur les contacts du second ordre. Il parvient à les démontrer par des considérations géométriques, et sans aucun calcul. Il y ajoute ensuite d'autres théorêmes qu'il a découverts, et qui sont pour la plupart remarquables par la simplicité de leurs énoncés.

Les cercles osculateurs de toutes les sections normales que l'on peut faire en un point donné sur une surface, ont leurs centres sur la normale en ce point; mais comme leurs rayons sont en général inégaux, et quelquefois tournés en sens opposés, il s'ensuit qu'ils ne peuvent pas appartenir tous à une même sphère; mais on sait par l'analyse, et M. Dupin démontre sinthétiquement que tous ces cercles sont toujours osculateurs des sections normales d'un même ellipsoïde, ou plus généralement d'une surface du second degré dont un

des axes coïncide avec la normale au point donné. Cet ellipsoïde est osculateur de la surface donnée dans tous les sens autour du point du contact; et pour déterminer la courbure de cette surface, il suffit de considérer celle de l'ellipsoïde à son sommet. Ainsi dans une surface quelconque, comme au sommet d'un ellipsoïde, les directions de la plus petite et de la plus grande courbure, à partir d'un même point, sont à angle droit. Ce sont les seules directions suivant lesquelles les normales consécutives puissent se couper, d'où il résulte les diverses propriétés des lignes de plus grande et de moindre courbure que l'un de nous (M. Monge) a le premier fait connaître; et enfin l'on en peut aussi conclure le beau théorème d'Euler, d'après lequel les courbures de toutes les sections normales autour d'un même point, se déduisent facilement des deux courbures principales.

M. Dupin considère, en particulier, les surfaces du second degré qui ont un centre. Il donne une construction simple et facile à exécuter, pour déterminer en chacun de leurs points, les directions et les grandeurs des deux courbures principales, et généralement de toutes les autres sections normales.

Revenant ensuite à la théorie générale des courbures, il démontre un théorème dont l'énoncé est assez compliqué, mais dont il tire deux conséquences importantes.

Il en conclut d'abord que si deux surfaces se touchent dans toute l'étendue d'une ligne courbe, tout plan tangent à cette ligne coupera les surfaces suivant deux courbes qui auront entre elles un contact d'un ordre *immédiatement* supérieur à

celui de ces surfaces (*). Lorsque, par exemple, un cône embrasse une sphère, il a avec elle, dans toute l'étendue d'un petit cercle, un contact du premier ordre. Or, tout plan mené par une tangente à ce cercle, coupera le cône et la sphère, suivant deux courbes qui se toucheront au second ordre; de sorte que la section de la sphère sera le cercle osculateur de la section conique.

La seconde conséquence que M. Dupin déduit de son théorème, c'est que si deux surfaces ont un plan tangent commun en un point, et que deux sections faites par un plan normal passent par une droite tracée sur ce plan tangent; ces sections ayant entr'elles un contact du second ordre, il en sera de même par rapport à toutes les sections obliques faites par des plans passant par la même droite; il en résulte donc que la sphère qui contient le cercle osculateur d'une section normale faite dans une surface quelconque, contient aussi les cercles des sections obliques faites par des plans qui passent par la même tangente, ou autrement dit, si un plan tourne autour d'une droite tracée sur le plan tangent à une surface, toutes les courbes suivant lesquelles il coupera cette surface, auront leurs cercles de courbure sur une même sphère. Le théorème qui lie les courbures des sections obliques à celles des sections normales est dû à Meusnier; en le joignant à celui d'Euler que nous avons cité, il en résulte que les courbures de toutes les lignes que l'on peut faire passer sur une même surface, et

(*) Depuis la rédaction de ce Rapport, l'Auteur a fait voir que le rapprochement de ces deux sections n'était pas seulement d'un ordre *immédiatement* supérieur à celui des deux surfaces, mais immédiatement supérieur au double de cet ordre. (Voyez le Supplément au second Mémoire, page 226 et suivantes.)

par un même point, sont liées entr'elles, de manière que la plus grande et la plus petite étant connues en grandeur et en direction, toutes les autres s'ensuivent.

Il nous reste à parler de la partie de son travail à laquelle M. Dupin attache le plus d'intérêt, et qu'il appelle la théorie des *tangentes conjuguées*. Pour concevoir ce qu'il entend par cette dénomination, supposons qu'une surface soit donnée et qu'on lui circonscrive une surface développable qui la touchera dans toute l'étendue d'une ligne courbe : la tangente à cette ligne, en un point donné, et l'arête de la surface développable qui passe par ce point sont ce que M. Dupin appelle *deux tangentes conjuguées*. Relativement à chaque point donné sur la surface, il existe évidemment une infinité de systèmes de semblables tangentes; tous ces systèmes jouissent de propriétés curieuses qui n'avaient point encore été remarquées, et dont voici les principales.

I°. Deux tangentes conjuguées sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire, que si l'arête d'une première surface développable est tangente à la ligne de contact d'une seconde surface de la même espèce, réciproquement la tangente à la première ligne de contact sera l'arête de la seconde surface.

II°. On peut toujours tracer dans le plan tangent, en un point donné, une section conique qui ait ce point pour centre, et dont les systèmes de diamètres conjugués représenteront en direction tous les systèmes de tangentes conjuguées. M. Dupin nomme cette courbe, l'*indicatrice*, parce qu'en effet il prouve qu'elle *indique*, par sa nature, le sens des deux courbures principales de la surface, en chacun de ses points.

III°. Les deux axes de l'indicatrice ou les tangentes conjuguées rectangulaires, sont tangentes aux lignes de plus grande et de moindre courbure.

IV°. Pour un même point d'une surface donnée, le rayon de courbure de chaque section normale est proportionnel au quarré du diamètre de l'indicatrice qui se trouve dans le plan de cette section, d'où il suit que selon que l'indicatrice est une ellipse ou une hyperbole, la somme ou la différence des rayons de courbure des sections qui répondent à deux tangentes conjuguées, est une quantité constante égale à la somme ou à la différence des deux rayons principaux. L'un de ces deux rayons devient infini, et la courbure disparaît dans un sens, lorsque l'indicatrice se change en une parabole; ce qui arrive, par exemple, en tous les points des surfaces développables.

Dans le second et le troisième Mémoire, M. Dupin applique l'analyse aux questions qu'il a traitées dans le premier; et, par son moyen, il développe sous un nouveau jour les démonstrations de plusieurs des propositions précédentes. Il forme l'équation de l'indicatrice pour un point quelconque d'une surface donnée; quand cette courbe est une ellipse, les deux courbures de la surface au point que l'on considère, sont tournées dans le même sens; elles sont tournées en sens opposés, lorsque l'indicatrice est une hyperbole; et de cette manière, l'examen des diverses inflexions que la surface peut éprouver, par rapport au sens de ses courbures, se trouve ramené à la discussion fort simple des courbes du second degré. Dans le cas de l'indicatrice hyperbolique, l'angle des asymptotes

fait connaître le rapport des deux courbures principales. Il est droit et l'indicatrice est une hyperbole équilatère en tous les points de la surface dont l'aire est un *minimum* entre des limites données; car on sait que cette surface jouit de la propriété d'avoir, en chacun de ses points, ses deux rayons de courbure principaux, égaux et dirigés en sens contraires. On sait aussi que si une surface du second degré peut être engendrée par une ligne droite, elle est susceptible d'une seconde génération semblable, et qu'il y a toujours deux génératrices qui se croisent en chaque point. Or, M. Dupin prouve que ces deux droites sont les asymptotes de l'indicatrice; d'où il conclut que sur un hyperboloïde à une nappe et sur un paraboloïde hyperbolique, les directions de la plus grande et de la moindre courbure en un point quelconque, partagent en deux parties égales l'angle des deux génératrices et son supplément; car c'est en effet la propriété des axes de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes.

La plus grande partie du troisième Mémoire est employée à la détermination des points dans lesquels l'indicatrice est un cercle, et où par conséquent les courbures de toutes les sections normales sont égales. Ces points remarquables ont déjà été considérés par l'un de nous (M. Monge) qui les a nommés des *ombilics*. Relativement à un point de cette espèce, l'équation des lignes de courbure devient identique, et leur direction semble d'abord devoir être indéterminée : c'est ce qui arrive effectivement en certains points comme aux sommets des surfaces de révolution. Mais M. Dupin fait voir qu'il y a d'autres ombilics par lesquels il ne passe qu'une ou

trois lignes de courbure, dont les directions sont déterminées, et il donne la raison de cette espèce de paradoxe.

Les recherches que nous venons d'exposer prouvent qu'au milieu des travaux dont il a été chargé, M. Dupin n'a pas perdu de vue les objets de ses premières études. Elles font desirer qu'un Ingénieur qui réunit des connaissances si étendues en géométrie et en analyse, publie bientôt l'ouvrage dans lequel il se propose de les appliquer à des questions de pratique et d'utilité publique. Nous pensons que ses trois Mémoires sont très-dignes de l'approbation de la Classe, et nous proposerions de les insérer dans le *Recueil des Savans Etrangers*, si l'auteur ne les avait destinés lui-même à un autre usage.

Signé, les commissaires

CARNOT, MONGE, et POISSON, *rapporteur*.

La Classe approuve le rapport et en adopte les conclusions. 28 Décembre 1812.

Certifié conforme à l'original.

Le secrétaire perpétuel,

DELAMBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE.

DE LA COURBURE

ET

DE L'OSCULATION DES SURFACES.

PREMIÈRE SECTION.

DE LA FORME DES SURFACES, A PARTIR DE CHACUN DE LEURS POINTS.

DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE.

PREMIER MÉMOIRE.

GÉOMÉTRIE PURE.

§ Ier.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Méthode adoptée dans ces Mémoires.

Si pour connaître la nature des diverses surfaces qu'il est possible de concevoir dans l'espace, on voulait examiner successivement et séparément chacune d'elles; à peine, après les plus longs travaux, une faible partie en aurait été parcourue, et il serait encore impossible de se former une idée, même imparfaite, de leur ensemble, et des propriétés de l'étendue en général. Mais si, portant moins l'attention sur les individus, pour n'envisager que les familles, on s'occupe seulement des genres qu'elles composent, des caractères qui les distinguent et des similitudes qui les unissent; on n'aura plus à considérer une infinité de formes différentes, de propriétés



 particulières et isolées. Plus les propriétés deviennent générales, plus elles soumettent de grandeurs à leurs lois, et plus aussi, dans leur développement, elles se réduisent à un petit nombre de principes remarquables et faciles à saisir. Ce sont autant de fils du vaste réseau dont s'enveloppe pour nous la nature des choses, et qui nous la décèlent; son tissu devient d'autant plus sensible, que les fils dont il se forme nous semblent moins multipliés, parce que chacun d'eux se prolonge plus au loin. Ainsi tel est l'avantage de cette manière d'envisager les surfaces, qu'en même temps que les principes auxquels on s'élevera s'agrandiront, leur nombre diminuera; et leur ensemble deviendra dès-lors plus susceptible d'être saisi par l'esprit, et retenu par la mémoire. Parmi toutes les divisions des formes de l'espace, nous devrons donc toujours préférer les plus générales. Par là nous donnerons à nos considérations et à nos résultats, le plus d'étendue et de simplicité qu'ils puissent obtenir. Suivant, en effet, que les géomètres se sont plus ou moins rapprochés de ces principes, dans la marche qu'ils ont suivie, leurs méthodes ont été aussi plus ou moins avantageuses.

Toutes les déterminations géométriques possibles se réduisent, en dernière analyse, à des configurations de surfaces qui doivent remplir des conditions données, en employant pour cela certaines lignes déjà connues et déterminées. Aussi la génération des surfaces est-elle une des branches de la science de l'étendue, dont on a le mieux senti l'importance, et dont on s'est le plus occupé. Pour mettre de l'ordre dans les recherches qu'on a faites à ce sujet, et les faciliter par la méthode, on a réuni dans une seule et même famille, toutes les surfaces qu'on est parvenu à soumettre au même mode de description. Ensuite on a cherché à développer les propriétés inhérentes à ce mode commun; elles ont présenté le caractère du genre qu'on a formé. C'est ainsi qu'ont été analysées[1], classées et rendues plus utiles, toutes les surfaces dont les formes

nous sont offertes par la nature dans ses phénomènes, ou par les sciences dans les combinaisons qui leur sont propres, ou par la société dans les usages de ses arts. Cependant, en suivant cette marche, chaque espèce ne comprend toujours qu'un nombre plus ou moins limité de surfaces, et, moins leur nombre est limité, moins les déterminations qui leur sont communes embrassent d'éléments, moins elles présentent de résultats.

Mais si considérant toutes les surfaces en général, on étudie la forme qu'elles affectent en chacun de leurs points, et que, parmi toutes les formes possibles de l'étendue figurée, on choisisse les plus élémentaires; afin de les poser, pour ainsi dire, sur celles qu'on examine, et d'apprécier ensuite leur rapprochement pour l'augmenter de plus en plus; on lira, si je puis parler ainsi, dans la forme générale et indéterminée des surfaces, tout ce qu'elle peut offrir de simple et de facile; on la décomposera dans ses derniers éléments, et en les réunissant successivement, on s'élevera enfin jusqu'à la surface même qu'on aura analysée.

Ainsi, en superposant le plan aux surfaces, il leur sera tangent, et il donnera la clef de toutes les propriétés des lignes et des surfaces tangentes à d'autres surfaces, des surfaces enveloppées par simple attouchement, etc.; en un mot, la surface du premier ordre fera connaître toutes les propriétés des contacts du premier ordre.

On substituera ensuite la surface du second ordre à celle du premier, c'est-à-dire, au plan, et par son moyen, on connaîtra tout ce qui peut être relatif aux contacts du second ordre ou à l'osculation des surfaces et à leur courbure.

On passerait de même aux contacts du troisième, du quatrième ordre, etc., en substituant aux surfaces comparatrices du premier ou du second ordre, celles du troisième, du quatrième, etc.

De cette manière, on rapportera au plan toutes les surfaces, dans la forme qu'elles affectent à partir de chacun de leurs points; on

les rapportera pareillement aux surfaces du second ordre, du troisième, etc. A mesure que le degré de la surface comparatrice s'élèvera, le rapprochement dont elle est susceptible s'accroîtra, et après avoir tiré de la primitive, au moyen des premiers rapprochements, tout ce qu'elle tient dans sa forme des plus simples surfaces, on finira comme nous l'avons déjà avancé, par s'élever jusqu'à elle, et déterminer entièrement sa figure en chacun de ses points.

On s'apercevra facilement, par ce que nous avons dit plus haut, combien cette méthode, comme la division qui en résulte, l'emporte sur la précédente dont elle fait même, à proprement parler, la base; combien elle doit répandre d'intérêt et de clarté sur la science de l'étendue. Elle a été pour l'analyse des lignes courbes, celle de Descartes, de Newton, de Leïbnitz et de plusieurs autres hommes illustres. On l'a étendue aux surfaces pour beaucoup de cas; on n'a presque rien laissé à dire sur les considérations relatives aux contacts du plan et des surfaces; on a effleuré les contacts du second ordre; on n'a pas pensé aux ordres supérieurs.

Nous avons cherché, dans ce Mémoire, à développer pour les contacts du second ordre, la méthode dont on vient de faire connaître l'esprit. Nous nous sommes par conséquent, pour cela, constamment servi des surfaces du second ordre. Nous avons recherché celles de leurs propriétés qui appartiennent également à toutes les surfaces des autres genres, et nous avons principalement eu pour but de donner le plus grand degré possible de généralité, aux différents résultats que ces rapprochements nous ont fait découvrir.

Notions sur les contacts du premier ordre.

Nous allons d'abord prouver que toute surface (S) est susceptible d'avoir en chacun de ses points [qui ne sont pas singuliers (*)],

(*) Voyez la note première, à la fin du Mémoire.

un plan tel que, à partir du point d'application, tout autre ne puisse passer entre le premier et la surface; et par conséquent, que toute surface est susceptible d'avoir un plan tangent en chacun de ses points : nous passerons ensuite aux tangences du second ordre, ou aux osculations.

Concevons que par le point P de la surface (S), fig. 1, on mène une droite quelconque, et un plan qui passant toujours par cette droite, prenne successivement toutes les positions dont il est susceptible avec cette condition. Dans chaque position, il coupera la surface suivant une courbe qui aura pour tangente en P une certaine droite ou PT, ou PΘ, ou.... Nous supposerons que les diverses sections planes de la surface, ne puissent chacune avoir en P qu'une seule tangente, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'aucune des sections planes de la surface, n'ait en P de point multiple.

Cela posé, l'ensemble des tangentes aux diverses sections que nous avons considérées, formera une surface évidemment tangente à la surface primitive. Examinons ce que peut être cette nouvelle surface. Si par deux des tangentes PT, PΘ dont elle se compose, nous menons un plan (Π); ou toutes les autres tangentes en P seront dans ce plan (Π), ou seulement un nombre déterminé PT, PΘ, Pθ, etc. Mais si ce dernier cas pouvait avoir lieu, le plan (Π) couperait évidemment la surface suivant une courbe qui, ayant en P plusieurs tangentes PT, PΘ, Pθ,...., aurait en P un point multiple (hypothèse que nous avons exclue) : donc le plan (Π) que l'on considère, étant supposé passer par les deux tangentes PT, PΘ, ce qui est évidemment toujours possible, il passe à la fois par toutes les autres tangentes. On doit voir maintenant, et sans qu'il soit nécessaire de le démontrer plus amplement, que le plan (Π), lieu des tangentes, jouit des deux propriétés qui caractérisent la tangence : de passer par un point de la surface, et d'être

Ier MÉMOIRE.

tel, que tout autre plan ne pourrait, à partir de ce point, avoir aucune de ses parties entr'elle et lui.

Utilité de leurs applications.

Si l'on considère sur une surface quelconque et autour d'un de ses points P, un espace fort petit, ou un espace plus étendu sur une surface dont la courbure soit très-peu considérable, cette portion de la surface différera extrêmement peu du plan qui la toucherait en P : ce sera de tous les plans possibles celui qui se rapprochera le plus de la surface, dans la partie que l'on considère ; et qui, par conséquent sera le plus propre à la représenter. Si donc une exactitude non pas absolue, mais assez grande, est suffisante, au lieu de considérer la surface elle-même, d'avoir égard à sa courbure, de tenir compte de la complication de tous ses éléments, on la supposera plane, et l'erreur dans laquelle cette hypothèse entraînera, sera d'autant moins considérable qu'on aura moins à s'étendre sur la surface, autour du point P où elle est touchée par le plan tangent (Π) qu'on lui substitue.

Exemple offert par la Géographie.

La surface de la terre, dont la courbure est assez peu sensible pour que, pendant long-temps, les peuples à qui l'habitude d'observer n'avait pas encore appris à se défier des premières illusions des sens, la jugeassent un vaste plateau, et dont la forme ensuite a successivement été crue sphérique, ellipsoïde et plus compliquée même, à mesure que nos connaissances se sont rectifiées ; la terre, dis-je, nous fournit dans la description de ses diverses contrées, un exemple sensible de l'utilité dont peut être la substitution des plans tangents aux surfaces courbes.

La forme attribuée aux méridiens et aux parallèles de la terre, a dû varier avec la forme même du globe, dans nos diverses hypothèses ; et maintenant ils ne sont plus pour nous ni des droites, ni des cercles, ni des ellipses, mais des courbes plus compliquées dont la nature ne nous est pas parfaitement connue. Les lignes les

plus courtes, suivant lesquelles nous mesurons nos distances sur le globe, sont à double courbure et certainement transcendantes. Si donc on voulait embrasser à la fois tant d'éléments dans une description exacte, les déterminations que nous jugeons devoir être les plus simples, seraient en effet les plus compliquées. Ier MÉMOIRE.

Au lieu de chercher à décrire la foule de courbes, de projections qui seraient alors nécessaires, parmi tous les horizons sensibles, c'est-à-dire, les plans tangents de la terre, menés à partir du point où est le spectateur, on choisira l'un de ceux qui s'écartent le moins de la portion du globe qu'on veut décrire ; c'est sur lui qu'on représentera la surface de la terre dans cette partie, qu'on supposera par conséquent plane (ainsi que le faisaient, mais sans croire se tromper, les premiers observateurs). On rapportera sur ce plan tous les points, toutes les courbes, toutes les distances. Les lignes à double courbure s'aplaniront, toutes les courbes viendront se confondre avec leurs tangentes ; et les opérations de la géométrie descriptive la plus délicate, seront ainsi ramenées aux déterminations les plus simples d'intersections de plans et de lignes droites.

Lorsqu'on doit représenter une portion du globe trop grande pour être confondue, sans erreur sensible, avec un de ses plans tangents ; les rapprochements du premier ordre ne suffisant plus, on passe à ceux du second. On choisit une surface simple et qui diffère peu de la surface de la terre ; on restitue ainsi à toutes les lignes qu'on considère, leur vraie courbure, ou du moins une courbure qui en diffère très-peu. On prend cette nouvelle surface pour celle de la terre ; et par cette seconde hypothèse, on porte dans les opérations de la géographie et des sciences d'observation, une précision infiniment plus grande que celle obtenue par la première. Elle a suffi jusqu'ici à tous les besoins des arts et des connaissances théoriques, même dans l'état de précision où nous les avons portés. Si par la suite, des re-

cherches d'une exactitude plus sévère encore, rendaient insuffisants ces rapprochements, il faudrait employer des surfaces rigoureusement osculatrices de la terre, c'est-à-dire, qui eussent avec elle, dans la partie que l'on considère, un contact du second ordre; et si pourtant cela n'était pas suffisant, il serait nécessaire de passer aux rapprochements du troisième ordre; alors il faudrait prolonger encore une des branches de nos connaissances géométriques.

Nous allons maintenant revenir à la théorie même des contacts, que nous avions un moment abandonnée pour en faire sentir l'utilité par un exemple remarquable.

Dans la méthode géométrique que nous suivrons ici, nous emploierons souvent des considérations infinitésimales, parce qu'elles rendent plus faciles et plus courtes des recherches assez compliquées par elles-mêmes, et qu'on reproche particulièrement à la géométrie pure l'étendue des développements qu'elle exige dès qu'on veut s'élever par elle à des questions d'un certain ordre.

§ II.

De l'osculation des surfaces.

Contacts du second ordre.

Soient tracées arbitrairement sur une surface générale (S), fig. 2, deux courbes $P\Phi C$, $P\varphi c$, et deux autres courbes $\varphi p C'$, $\Phi p c'$, immédiatement consécutives à celles-là; si une seconde surface (Σ) passant par le point P est telle que les quatre courbes $P\Phi\Gamma$, $P\varphi\gamma$; $\varphi p\Gamma'$, $\Phi p\gamma'$ soient respectivement osculatrices en P, P; φ, Φ aux quatre courbes précédentes; je dis que les deux surfaces seront osculatrices au point P, c'est-à-dire, seront telles que tout plan passant par P coupera les deux surfaces suivant deux courbes $P\Psi\psi D$, $P\Psi\psi\Delta$, réciproquement osculatrices en ce point.

En effet, ce plan coupant rencontrera à la fois en Ψ et ψ les courbes respectivement osculatrices $\Phi pc'$, $\Phi p\gamma'$; et $\varphi p C'$, $\varphi p \Gamma'$; puisque les courbes osculatrices sont celles qui ont de commun trois points consécutifs, lesquels sont ici : 1er MÉMOIRE.

$$\Phi, \underline{\Psi}, p \quad \text{pour} \quad \Phi\underline{\Psi}pc' \quad \text{et} \quad \Phi\underline{\Psi}p\gamma',$$

$$\varphi, p, \underline{\psi} \quad \text{pour} \quad \varphi p\underline{\psi}C' \quad \text{et} \quad \varphi p\underline{\psi}\Gamma';$$

et enfin,

$$P, \underline{\Psi}, \underline{\psi} \quad \text{pour} \quad P\underline{\Psi}\underline{\psi}D \quad \text{et} \quad P\underline{\Psi}\underline{\psi}\Delta.$$

Il est évident que les deux surfaces (S) et (Σ) étant identiques dans l'élément $P\Phi p\varphi$, auront en P, Φ, p, φ mêmes plans tangents, et par conséquent mêmes normales. Mais, comme la courbure d'un élément de ligne courbe est déterminée par deux normales consécutives, l'élément $P\Phi p\varphi$ sera complettement déterminé par les quatre normales à (S) et (Σ) en P, Φ, p, φ; ainsi dans tous les cas, il suffit à deux surfaces quelconques (S) et (Σ) d'avoir en commun quatre normales consécutives arbitraires, autour d'un même point P, pour être mutuellement osculatrices dans tout l'élément compris sur elles *entre* ces quatre normales.

Mais si les normales aux deux surfaces en P, Φ, p, φ sont communes, les courbes

$P\Phi C$ et $P\Phi\Gamma$	$P\varphi c$ et $P\varphi\gamma$	Ppd et $Pp\delta$

seront osculatrices, et réciproquement : donc, « dès que deux surfaces sont osculatrices en un même point P, dans trois de leurs sections différentes, mais arbitraires, elles le sont encore dans toutes les autres sections possibles $P\Psi D$, $P\Psi\Delta$ faites à partir du point P de contact, par une surface coupante quelconque. »

Ce que c'est que la courbure d'une surface.

La courbure des surfaces en chacun de leurs points, n'est pas unique comme celle des lignes courbes. Suivant qu'à partir d'un point P d'une surface, on marche sur elle sous des directions différentes, la courbure de la ligne qu'on parcourt varie, et c'est le système de toutes ces courbures mesurées sur la surface, qui constitue la courbure même de cette surface au point P que l'on considère. Suivant donc que ces courbures seront plus grandes ou plus petites, on dira aussi que la courbure même de la surface est plus ou moins grande : enfin, on mesurera la courbure des surfaces par celle des courbes tracées sur elles.

Élémens nécessaires à sa détermination.

Nous venons de voir qu'il suffit que trois courbes tracées sur une surface (S), à partir d'un point P, soient osculées en ce point par trois autres courbes tracées sur une seconde surface (Σ), pour que toutes les sections possibles faites en P par un même plan sur ces deux surfaces, soient pareillement osculatrices entr'elles, c'est-à-dire, aient la même courbure. Ainsi, « la courbure et la position de trois lignes menées arbitrairement sur une surface par un de ses points, suffit pour déterminer entièrement au même point la courbure de la surface qui les contient. »

Une surface quelconque toujours osculée en chacun de ses points par une surface du second degré.

Si donc par la normale PΓ de (S), fig. 3, on fait sur cette surface trois sections planes Pm, Pm', Pm''; qu'on prenne arbitrairement sur cette normale un point C regardé comme centre de trois courbes $P\mu E$, $P\mu' E$, $P\mu'' E$ du second degré, respectivement osculatrices des primitives Pm, Pm', Pm''. Ces trois courbes seront susceptibles d'appartenir à une même surface du second degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, et cette surface sera osculatrice en P à la primitive. (Voyez la note II.)

De là résulte ce théorème remarquable : « Quelle que soit la forme d'une surface, cette forme peut toujours, à partir de chacun de

ses points non singuliers, être représentée par celle d'une surface du second degré, de manière que pour chaque ligne tracée sur la surface générale, à partir du point que l'on considère, il correspondra sur la surface du second degré, une courbe qui osculera cette ligne au même point. »

Par le moyen de cette surface osculatrice du second degré, nous pouvons dès à présent ramener toute la théorie des contacts du second ordre, et celle de la courbure des surfaces quelconques, à l'analyse des surfaces du second degré; et comme celles-ci sont extrêmement simples, très-faciles à discuter, nous aurons éludé par là toutes les difficultés que la question générale eût pu présenter.

D'où la théorie entière de la courbure et de l'osculation des surfaces quelconques, ramenée à la simple analyse des surfaces du second degré.

On sait que par chaque axe PCE, fig. 4, d'une surface du second degré, passent deux sections principales PAE, PBE qui se coupent à angle droit aux deux sommets P, E. Ces sections sont entièrement déterminées par la grandeur de leur courbure en P, et la position de leurs sommets P, E. Elles-mêmes ensuite déterminent la surface $\binom{\Sigma}{2}$ qui leur appartient. Donc « il suffit à la détermination et à la mesure de la courbure en P d'une surface quelconque (S), de connaître la courbure des deux sections principales PAE, PBE de l'osculatrice du second degré $\binom{\Sigma}{2}$, c'est-à-dire, la grandeur des deux rayons de courbure qui en P appartiennent à ces sections. »

Translation des diverses propriétés de la courbure des surfaces du second degré, à la courbure des surfaces générales.

L'une des sections principales PAE est la plus grande, l'autre PBE la plus petite de toutes les sections qui ont l'axe PE pour diamètre. Par conséquent, en les supposant toutes rabattues sur un même plan, autour de l'axe commun PE, la courbe extérieure PAE sera la plus grande section principale, et la courbe intérieure PBE la plus petite. Il suit de là qu'aucune courbe PDE donnée par les

Ier MÉMOIRE. sections normales en P, ne peut avoir en ce point une courbure moindre que celle de la grande section principale, ni plus forte que celle de la petite (*). Ces deux sections sont donc les limites de la courbure de la surface, estimée suivant les sections normales.

Ainsi, la plus courbée, et la moins courbée des sections normales d'une surface (S), en un de ses points P, sont nécessairement dans des plans qui se coupent à angle droit; et pour que la courbure en P de la surface (S), soit entièrement déterminée, il suffit que cette plus courbée et cette moins courbée des sections normales en P le soient toutes deux.

Rayons de courbure des surfaces.

Les rayons de courbure de ces sections limites, c'est-à-dire, par conséquent, le plus petit et le plus grand rayon de courbure des sections normales en P, ont été nommés *rayons de courbure* de la surface : on voit donc que la courbure d'une surface en chacun de ses points, est déterminée par la seule connaissance de ses *deux rayons de courbure.*

Nous ferons voir, par la suite, d'autres conditions également simples, et, comme celle-ci, suffisantes pour la détermination de la courbure des surfaces, lorsque nous nous occuperons de sa mesure absolue. Nous allons actuellement dire un mot des

---

(*) On sait, fig. 5. V, qu'une suite de courbes PAE, PDE, PBE ayant l'axe PE commun, ont pour la même abscisse Cc, leurs ordonnées *ca*, *cd*, *cb* proportionnelles aux demi-axes CA, CD, CB : donc, chacune de ces courbes embrassera toutes celles qui auront ce second axe plus petit que le sien ; mais à partir d'un même point P, la courbe embrassée est plus courbée que celle qui l'embrasse ; par conséquent, la courbure des lignes PA, PD, PB sera toujours plus grande en P, à mesure que le second axe décroîtra : donc, enfin, les deux courbes extrêmes PAE, PBE, c'est-à-dire, les deux sections principales, sont celles de moindre et de plus grande courbure en ce point P.

diverses *grandeurs graphiques* (*) que la considération des surfaces dans leur courbure, a forcé d'envisager : pour le moment, nous présenterons seulement celles de leurs propriétés qui pourraient jeter quelque jour sur la détermination de la courbure des surfaces en chacun de leurs points; nous réservant, dans la seconde Section de ces Recherches théoriques, de considérer la courbure des surfaces sur toute l'étendue de leurs nappes; et de chercher, si nous pouvons parler ainsi, l'influence de la courbure en chaque point d'une surface, sur les points suivants.

1er MÉMOIRE.

Orthogonalité des sections normales, qui leur correspondent.

Toutes les normales à la surface du second degré $\binom{\Sigma}{2}$, fig. 4, suivant les sections principales PAE, PBE, passent, comme on sait, par l'axe PCE, c'est-à-dire, par la normale PE, et elles sont les seules normales de la surface qui puissent couper cet axe (**).

(*) Souvent, dans la géométrie transcendante, où l'on considère l'étendue dans tous les degrés de généralité, on doit parler à la fois de points, de lignes, de surfaces, de volumes. C'est pour éviter cette longue énumération, que nous avons cru devoir désigner toutes ces grandeurs par l'expression générale de *grandeurs graphiques*, c'est-à-dire, susceptibles d'être figurées. Le perfectionnement du langage de la science, est peut-être moins étranger qu'on ne le croit communément, au perfectionnement de la science elle-même.

(**) Soit en effet le point P (fig. 5, H) la projection horizontale du sommet de la surface du second degré $\binom{\Sigma}{2}$, et voyons si du point M quelconque de $\binom{\Sigma}{2}$, peut partir la normale MP qui vienne couper l'axe vertical projeté par le point P.

Pour cela, faisons par M la section horizontale *aMb* dans $\binom{\Sigma}{2}$, la projection de la normale en M à $\binom{\Sigma}{2}$ sera la normale même de cette courbe, pour le point M. Mais cette courbe est du second degré et son centre est en P, projection de l'axe

Iᵉʳ MÉMOIRE. Mais les deux normales immédiatement consécutives de chaque section en P, sont communes à la primitive (S) et à son osculatrice $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$: donc on peut, de chaque normale PΓ d'une surface quelconque (S), fig. 5, passer dans deux directions différentes seulement PP', PP$_{,}$, à une autre normale P'Γ' ou P$_{,}$Γ$_{,}$, immédiatement consécutive à PΓ, et qui la rencontre. Ces deux directions sont constamment orthogonales : elles sont au point primitif P celles des sections normales dont la courbure est un *maximum* ou un *minimum*.

Si du point P on passe en P' sur la direction de plus grande courbure, la normale P'Γ' ira rencontrer celle PΓ en Γ', centre de la courbure de l'arc PP', estimée suivant la surface ; de même P'Γ' sera coupée par une autre normale P''Γ'' qu'on obtiendra en suivant encore, à partir de P', la direction de plus grande courbure. En continuant ainsi, on obtiendra sur la surface une suite de points P, P', P'', P'''...., tels qu'en chacun d'eux, la direction de la ligne qu'ils forment soit celle de la plus grande courbure des sections normales de la surface. On a nommé cette ligne, *ligne de plus grande courbure de la surface*. D'après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, la raison de cette dénomination est évidente.

Lignes de plus grande courbure.

Si du point P, au contraire, au lieu de suivre la direction des plus grandes courbures, on avait constamment suivi l'autre direction P, P$_{,}$, P$_{,,}$, P$_{,,,}$...., dans laquelle se rencontrent consécutivement les normales PΓ, P$_{,}$Γ$_{,}$, P$_{,,}$Γ$_{,,}$,...., on aurait formé une

---

vertical. Donc, pour que MP pût être normale en M à la courbe AMB, il faudrait que ce point fût un sommet de la courbe, ou que la courbe fût un cercle. Dans ce dernier cas, toutes les normales aboutiraient au centre. Nous parlerons plus tard de ce cas particulier.

nouvelle courbe perpendiculaire en P à la première, et qui, dans chacun de ses points, aurait eu pour direction celle de la section normale de moindre courbure. On a nommé cette courbe, *ligne de moindre courbure*, et l'on a désigné d'un nom commun les lignes de plus grande et de moindre courbure, en les appelant l'une et l'autre *lignes de courbure de la surface*.

1er MÉMOIRE.

Lignes de moindre courbure.

Ainsi, par la définition même des lignes de courbure des surfaces, nous voyons que *toutes les lignes d'une même courbure sont coupées à angle droit par chacune des lignes de l'autre courbure*.

Orthogonalité de leurs intersections.

De plus, deux normales consécutives de la surface, et qui appartiennent à la même ligne de courbure, se rencontrant nécessairement, toutes les normales de la surface, parties d'une même ligne de courbure, forment une *surface développable*. Donc toutes les surfaces développables appartenant aux lignes d'une des courbures, sont coupées à angle droit par chacune des surfaces développables appartenant à l'autre courbure, et cela suivant toute l'étendue des normales de la primitive; ce qui d'ailleurs est évident, puisque ces surfaces développables ont pour plans tangents en chacun de leurs points P, sur la primitive (S), les plans principaux de la surface du second degré $\binom{\Sigma}{2}$ osculatrice de (S) en ce point.

Surfaces développables des normales. Orthogonalité de leurs intersections.

Les intersections successives Γ, Γ', Γ'',... des normales de la surface primitive (S), suivant une des lignes de plus grande courbure; c'est-à-dire, par conséquent, les divers points de l'arête de rebroussement de la surface développable que forment ces normales, sont les centres de plus grande courbure de la surface, suivant toute cette ligne de courbure; la suite de ces arêtes de rebroussement données par toutes les lignes de plus grande courbure, forme une certaine surface *lieu de tous les centres des*

Surfaces des centres des deux courbures.

1er MÉMOIRE. *plus grandes courbures* de la primitive (S), et dont le caractère est d'avoir pour tangentes chacune des normales de la surface primitive.

De même, le système des arêtes de rebroussement des surfaces développables des normales, pour les lignes de moindre courbure, forme une surface *lieu de tous les centres des moindres courbures* de la primitive (S), et dont le caractère est aussi d'avoir pour tangentes chacune des normales de la surface primitive.

Donc, chaque normale PΓ de la surface primitive est à la fois tangente aux deux surfaces des centres de courbure.

Si l'on considère le centre Γ′ d'une des courbures de la primitive pour le point P, les deux normales consécutives PΓ′, P′Γ′ dont il est l'intersection étant tangentes à la surface des centres de l'autre courbure, le plan PP′Γ′ de ces deux rayons de la première courbure sera tangent à la surface des centres de seconde courbure : par la même raison, le plan $PP_{,}\Gamma_{,}$ de deux rayons consécutifs de seconde courbure, sera tangent à la surface des centres de la première courbure; or, ces deux plans se coupent constamment à angle droit : donc, la loi qui lie l'une à l'autre les deux surfaces des centres, est « que si par une normale quelconque PΓ de la primitive (S), on mène à chacune d'elles un plan tangent, PP′Γ′, $PP_{,}\Gamma_{,}$ ces deux plans se couperont constamment à angle droit : d'où il résulte que l'un sera normal à la surface des centres au point où l'autre plan la touchera ». Mais deux normales consécutives P′Γ′, P″Γ″ sont tangentes à la courbe des centres Γ′Γ″ appartenant à la ligne de courbure PP′P″.... Donc le plan PP′Γ′ qui les contient toutes deux, est osculateur de cette courbe des centres; donc, *tous les plans osculateurs de chaque ligne des centres d'une même courbure, sont normaux à la surface des centres de cette courbure.* Telle est la condition nécessaire pour qu'un système de lignes tracées

Orthogonalité de leurs plans tangents ou de leurs contours apparents.

sur une surface quelconque, puisse être regardé comme le système des lignes lieux des centres de courbure d'une surface.

Cette propriété est très-importante par elle-même, et nous en ferons par la suite un grand usage, en appliquant les considérations de la courbure des surfaces, à la théorie des déblais et des remblais. Mais alors nous lui donnerons plus de développement encore, en y ajoutant plusieurs propriétés générales qui en dépendent.

Nous allons maintenant revenir à l'examen de la forme des surfaces en leurs divers points, et chercher à déterminer la courbure des différentes sections qu'il est possible de faire par chacun d'eux sur la surface. Mais nous avons besoin pour cela d'exposer quelques généralités préliminaires.

§ III.

De la courbure des surfaces et de celle de leurs sections.

Propriétés générales des contacts des surfaces dont la forme éprouve des variations déterminées.

Si, fig. 7, par des ordonnées φm; $\varphi' m'$,.... parallèles à un plan quelconque, tous les points d'une surface (S) sont rapportés au plan (Π) qui la touche en P; et si nous supposons que ces ordonnées, ayant sur le plan (Π) leur origine φ, φ',... invariable, on les incline toutes semblablement, afin qu'elles restent parallèles entr'elles; on formera de la sorte un nouveau système d'ordonnées $\varphi\mu$, $\varphi'\mu'$,...., dont les points d'application formeront une surface (Σ). Or, si les points correspondans m et μ, m' et μ',... sont respectivement à la même distance du plan (Π); je dis que la courbure de la surface en P n'aura pas changé, c'est-à-dire, que la nouvelle surface (Σ) sera osculatrice en P à la primitive (S).

Pour démontrer cette proposition, soit mené le plan coupant (π),



parallèlement au plan (Π), et à une distance infiniment petite du second ordre, la section $mdm'd'$ faite par le plan (π) sur la surface (S), sera une courbe du second degré dont les diamètres auront une longueur infiniment petite du premier ordre; puisque cette courbe est toute entière sur chacune des surfaces du deuxième degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, osculatrices en P à la primitive (S). Soit $\mu\delta\mu'\delta'$ la nouvelle position de cette courbe, après l'inclinaison générale des ordonnées de la surface (S).

Si on mène une sécante quelconque KK' dans le plan (π) de ces courbes, les parties $d\delta$ et $d'\delta'$ seront infiniment petites par rapport à dd' et $\delta\delta'$ (tant que cette droite ne sera pas tangente à l'une des deux courbes). Donc le cercle osculateur de la primitive (S) passant par d, P, d', et le cercle osculateur de la dérivée (Σ) passant par δ, P, δ', différeront infiniment peu l'un de l'autre : donc les deux sections faites sur (S) et (Σ) par le plan quelconque PKK', seront osculatrices en P; donc enfin, (S) et (Σ) elles-mêmes sont osculatrices, et la surface (S), dans la déformation qu'elle a subie, n'a pas changé de courbure au point P.

Si au lieu de rapporter sur le plan (Π) les divers points de la surface (S), par des ordonnées rectilignes et parallèles, on les rapportait sur ce plan par des lignes courbes absolument arbitraires et indépendantes, assujéties seulement à couper le plan (Π) parallèlement à une droite quelconque; en faisant varier ensuite à volonté et la forme et la position de ces ordonnées curvilignes [pourvu que leur origine φ, φ'... sur le plan (Π) n'ait pas changé, que leurs tangentes en ce point soient toutes parallèles (*) à une autre droite aussi quelconque, et qu'enfin leur point d'application sur (S) reste toujours à la même distance de (Π)], la courbure de

(*) Cette seconde condition n'est pas même nécessaire.

la surface (S) au point P de son contact avec le plan (Π) n'aura pas changé, c'est-à-dire, que la surface dérivée sera encore osculatrice de la primitive en P.

Si dans la variation générale de ces ordonnées curvilignes, non-seulement les ordonnées de la première surface entr'elles et celles de la seconde pareillement entr'elles, coupaient le plan (Π) sous un même angle, mais que cet angle fût identique dans les deux systêmes, alors les deux surfaces ne seraient pas simplement osculatrices, elles auraient un contact du troisième ordre; et en supposant successivement que les ordonnées dérivées, au lieu d'avoir sur le plan (Π) une simple intersection avec leurs primitives, ou seulement un rapprochement du premier ordre, aient entr'elles un contact du second, ou du troisième, ou du quatrième, etc. ordre, la surface dérivée aura successivement au point P, avec la primitive, un contact du quatrième, du cinquième, du sixième, etc... ordre; en un mot, *le degré du contact des surfaces au point P, sera toujours de deux unités supérieur à celui du rapprochement des ordonnées, à partir du plan* (Π) *leur origine commune.*

En concevant encore, en effet, un plan coupant (π) parallèle au plan tangent (Π), et supposant toujours leur distance infiniment petite du second ordre, on verra que dans le cas où l'angle des nouvelles ordonnées sur (Π) diffère de celui des anciennes, les sections faites par le plan (π) sur les surfaces primitive et dérivée, diffèrent seulement de quantités du second ordre : ainsi que nous l'avons démontré, en supposant les ordonnées rectilignes et parallèles.

On verra qu'en supposant de plus que les ordonnées partent du plan (Π) sans changer la direction suivant laquelle elles se coupent, c'est-à-dire, qu'à leur origine, sur le plan (Π), les nouvelles ordonnées conservent avec les anciennes, un contact du premier ordre,

 la surface dérivée s'approchera infiniment plus encore de la primitive, et les sections de ces surfaces par le plan (π) ne différeront plus entr'elles que de quantités du troisième ordre.

On verra, toujours en suivant la même marche, et en supposant que les nouvelles ordonnées partent du plan (Π), en conservant un contact du second ordre avec les anciennes; on verra, dis-je, que les sections du plan (π) sur les deux surfaces, ne différeront plus entr'elles que de quantités du quatrième ordre; et ainsi de suite.

Enfin, on prouvera avec une égale facilité que les ordonnées secondaires conservant sur le plan (Π) avec leurs primitives, un contact d'un ordre quelconque, les sections faites par le plan (π) sur les deux surfaces, ne diffèrent entr'elles que de quantités d'un ordre supérieur de *deux* unités à celui-là; et on en conclura généralement que les surfaces mêmes, primitive et dérivée, ont en P un attouchement d'un ordre supérieur de *deux* unités à celui de leurs ordonnées respectives. Ce principe renferme tous les théorêmes particuliers que nous venons d'exposer.

Théorème général.

On a supposé, dans tout ce qui vient d'être dit, que les ordonnées d'un même systême partent toutes ensemble du plan (Π) sous une direction parallèle; cette hypothèse n'est nullement nécessaire; il suffit que les courbes ordonnées ne soient pas tangentes au plan (Π), à partir du point P de contact de ce plan et de la surface (S).

On a supposé que les points de (S) marchent sur des plans parallèles au plan (Π), ils peuvent marcher sur des surfaces quelconques (σ'), (σ''), (σ'''), ..., pourvu que celle (σ) qui passe en P ait aussi (Π) pour plan tangent en ce point.

Ces deux conditions remplies, le théorême suivant aura lieu dans toute sa généralité,

« Que par des ordonnées curvilignes absolument arbitraires,
» on rapporte la position des divers points d'une surface (S), à
» ceux du plan (Π) qui la touche en P; le point d'application de
» chaque ordonnée marchant arbitrairement sur une des surfaces
» quelconques (σ), (σ'), (σ''), ..., quelle que soit la variation
» imprimée à la surface (S) par ce transport général de ses points,
» l'infinité des nouvelles surfaces (Σ) obtenues de la sorte, auront
» toutes en P, avec la primitive (S) un contact du second ordre. »

En effet si nous considérons la courbe ordonnée φm, fig. 8, dont le pied φ est infiniment voisin du point P, et que nous menions le plan coupant (π) parallèle au plan tangent (Π), mais à une distance infiniment petite du *second* ordre; la nouvelle ordonnée $\varphi\mu$ partie du point φ, aboutira au point d'application μ tel que la distance $m\mu$ ne puisse être infiniment plus grande que φm, ou simplement, que la distance des plans (Π) et (π). Car alors l'une des deux courbes ordonnées serait tangente au plan (Π) (ce qui serait contre l'hypothèse). Ainsi $m\mu$ ne peut être plus grand qu'une quantité du *second* ordre. Par conséquent la courbe $mm'm''$.... sera transformée en celle $\mu\mu'\mu''$.... telle que les distances des points correspondants m et μ, m' et μ', m'' et μ'', ne puissent être plus grandes que des quantités du second ordre: les dimensions de ces courbes étant d'ailleurs du premier ordre. Or si du point m je mène la ligne $m\mu_{,}\nu_{,}n$ qui *coupe* à la fois la courbe primitive $mm'm''$,.... et sa dérivée $\mu\mu'\mu''$,....; les distances de m à μ et à $\mu_{,}$ ne pourront être que dans un rapport fini; et puisque $m\mu$ ne peut surpasser le second ordre, $m\mu_{,}$ ne le surpassera pas non plus: il en sera de même de $n\nu_{,}$. Mais d'ailleurs les dimensions de $mm'm''$, ..., sont du premier ordre: donc mn est aussi du premier ordre. Et comme il ne diffère de $\mu_{,}\nu_{,}$ que de quantités $m\mu_{,}$; $\nu_{,}n$ du second ordre, les cercles osculateurs des sections $m\mathrm{P}n$, $\mu\mathrm{P}\nu$ faites par un même plan dans les deux surfaces primitive et dérivée, ne pourront

1er MÉMOIRE. différer qu'infiniment peu l'un de l'autre; donc les deux surfaces sont mutuellement osculatrices.

« Maintenant si l'on suppose dans la variation de forme et de » position de toutes les courbes ordonnées, non-seulement que » leur origine demeure invariable, comme dans le cas précédent, » mais qu'elles conservent de plus à cette origine un contact du pre- » mier ordre, c'est-à-dire, qu'elles restent tangentes à leur première » direction, la surface dérivée aura avec la primitive un contact du » troisième ordre; puisqu'elle s'en rapproche infiniment plus que » dans le cas précédent. Si les nouvelles ordonnées conservent avec » les anciennes un contact du second ordre, les surfaces primitive » et dérivée auront entr'elles un contact du quatrième ordre; et gé- » néralement le contact des surfaces primitive et dérivée sera supé- » rieur de *deux* unités à celui de leurs ordonnées respectives. »

Énoncé plus simple. Ces énoncés généraux pourraient être rendus sous une forme équivalente, d'une manière plus rapide, il est vrai, mais qui serait moins appropriée à la marche que nous suivons, et surtout à l'application que nous allons faire des propriétés dont ils sont l'expression, pour déterminer la grandeur absolue des rayons de courbure, tant des surfaces que des diverses sections tracées sur elles.

Voici donc comment on peut exprimer ces théorêmes avec la même extension, mais sous une forme qui ne rappellera plus le moyen de produire de nouvelles surfaces (Σ) en contact de différens ordres avec la primitive (S).

« Si l'on imprime à tous les points d'une surface (S) un mouvement parallèle au plan (Π) qui la touche en P, ce point restant immobile, et le déplacement de ceux qui le suivent immédiatement étant dans un rapport fini quelconque, avec leur distance au plan (Π), la nouvelle surface (S) formée par cette transformation sera toujours *osculatrice* en P à la primitive. Et généralement si le déplacement des points *contigus* en P sur la surface est avec leur

distance au plan P dans un rapport infiniment petit d'un ordre quelconque m, quelle que soit ensuite à une distance finie du point P, la transformation subie par la primitive (S), la nouvelle surface (Σ) aura toujours avec elle un contact d'un ordre $m + 2$ de *deux* unités supérieur.

On pourrait donner beaucoup de développement à ces divers principes, et en déduire plusieurs théorêmes qui peut-être ne seraient pas sans utilité. Mais en le faisant nous sortirions de notre sujet. Nous ne cherchons à rapprocher les surfaces que pour découvrir, dans celles que nous ne connaissons pas encore, les propriétés qui doivent leur être communes avec celles qui nous sont déjà connues, ou que leur simplicité nous livre immédiatement. Il ne faut pas nous écarter de cette route, quelque attrait que puissent d'ailleurs nous présenter d'autres objets, même assez voisins de ceux qui doivent nous occuper, pour ne pas leur paraître étrangers. Peut-être, malgré cela, les personnes très-versées dans les considérations de la Géométrie, trouveront-elles encore que je suis entré dans trop de détails; mais si ces développements rendent plus facile ce qui leur semblera trop élémentaire, ils ne seront certainement pas superflus pour tous les lecteurs.

Au reste, dans la seconde partie spécialement destinée aux applications, nous montrerons quelques conséquences de ces principes, relativement aux surfaces qu'on décrit géométriquement par un système de sections planes parallèles, comme dans certains Levés topographiques, et dans les plans de Vaisseaux; nous trouverons par là l'occasion de présenter les vérités que nous venons d'exposer, sous une forme plus simple et plus facile à retenir. Maintenant nous allons les employer à la recherche des rayons de courbure des surfaces, et généralement des diverses sections faites sur ces surfaces.

Ier MÉMOIRE.

Du rayon de courbure des sections normales des surfaces.

Considérons la surface générale (S), fig. 9, coupée par le plan $A\Delta P\delta\alpha$, normal en P à (S), et dirigé arbitrairement; demandons-nous la grandeur du rayon de courbure en P de la section $A\Delta P\delta\alpha$. Si nous menons la droite $\Delta\delta$ parallèle au plan (Π), tangent à (S) au point donné P, et seulement à une distance $P\gamma$ du second ordre, on pourra regarder le petit arc $\Delta P\delta$ comme appartenant au cercle osculateur de la section que l'on considère. Or on sait que le rayon de cet arc est égal au quarré de $\frac{1}{2}\Delta\delta$ divisé par $2P\gamma$, ou simplement à $\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta\delta^2}{P\gamma}$ (*).

On voit d'abord par là que si l'on faisait croître toutes les hauteurs $P\gamma$ proportionnellement entr'elles et au quarré des cordes $\Delta\delta$ parallèles à (Π), les nouvelles courbes qu'on obtiendrait n'auraient pas changé de courbure en P; et si l'on conçoit un système quelconque de ces sections normales $A\Delta P\delta\alpha$, $A'\Delta'P\delta'\alpha'$,... propre à couvrir toute la surface (S), en supposant que toutes ces courbes éprouvent à la fois la variation que nous venons d'imprimer à $A\Delta P\delta\alpha$, dans cette transformation de la surface (S), chaque courbe conservant en P sa courbure, la courbure même de la surface (S) ne changera pas, et la surface dérivée osculera la primitive.

De là résulte cette proposition générale: « Si tous les points

(*) Pour démontrer la légitimité de cette valeur, considérons, fig. 10, le petit arc $\Delta P\delta$ de APB; $P\Delta a\delta P$ étant le cercle osculateur qui contient ce petit arc, et la corde $\Delta\delta$ étant parallèle à la tangente en P de ce cercle, le rayon OP sera perpendiculaire à la corde $\Delta\delta$ qu'il coupera par son milieu γ. Or, dans le cercle, la demi-corde $\gamma\delta$ est une moyenne proportionnelle entre les parties γP, γa du diamètre $a\gamma P$ qui la divise en parties égales, ce qui donne $\gamma P : \gamma\delta :: \gamma\delta : \gamma a$. Mais lorsque γP est infiniment petit, γa diffère infiniment peu du diamètre même: donc ce diamètre égale $\frac{\gamma\delta^2}{\gamma P}$ ou $\frac{1}{4}\cdot\frac{\Delta\delta^2}{P\gamma}$; et par conséquent le rayon $OP = \frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta\delta^2}{P\gamma}$.

$\delta, \delta', \delta'', \ldots, \Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$ de chaque section (π) faite sur la surface (S) parallèlement au plan (Π), sont joints deux à deux par les cordes $\delta\Delta$, $\delta'\Delta'$, $\delta''\Delta''$,...., suivant une loi quelconque; en supposant que les cordes varient à la fois de manière que leurs quarrés croissent ou diminuent comme les simples distances des sections (π) au plan tangent (Π), (ces cordes restant chacune avec P dans un même plan); on pourra former de la sorte une infinité de surfaces différentes, qui toutes auront en P, avec la primitive (S), un contact du *second* ordre. »

Ensuite, ainsi que nous l'avons exposé plus haut avec détail, en donnant à tout le système rapporté sur le plan (Π) par des ordonnées droites ou courbes, une impulsion parallèle au plan (Π), mais d'ailleurs absolument arbitraire : à chacune des surfaces dérivées que nous venons de former, pourra correspondre une infinité d'espèces différentes de surfaces; et toutes ces nouvelles surfaces dérivées seront encore, comme les premières, osculatrices de la surface primitive (S).

La connaissance de toutes les formes possibles de courbures des surfaces ramenée à celle de la courbure d'une surface individuelle en un seul de ses points.

On doit voir par l'étendue qu'ont pris les divers résultats auxquels nous venons successivement d'être conduits, que si la nature et la forme de la courbure d'une seule surface nous étaient connues, nous pourrions, par cet unique secours, atteindre à la même connaissance dans les surfaces les plus générales; puisque d'une surface particulière quelconque nous pouvons passer à toutes les autres, ou sans altérer la courbure au point de contact P, ou en appréciant les altérations que nous devons y apporter.

La sphère choisie pour conduire à la connaissance de toutes les autres surfaces dans leurs courbures.

Mais la surface de la sphère nous est parfaitement connue; la sphère est d'ailleurs, relativement à sa courbure, la plus simple de toutes les surfaces; tous ses rayons de courbure sont d'une même grandeur, ils sont égaux à son rayon descripteur; ces rayons sont

en même temps ceux de toutes les sections normales de la sphère: enfin, les rayons des sections obliques ne sont autre chose que la projection, sur le plan de ces sections, des rayons de courbure de la surface qui viennent aboutir à la circonférence de ces mêmes sections obliques. Si donc par la connaissance de la courbure d'une seule surface, nous sommes en état de nous élever à la connaissance de la courbure de toutes les autres, la sphère est certainement la plus propre à nous faire atteindre ce but le plus rapidement et le plus simplement possible. C'est elle aussi que nous allons employer pour y parvenir. (Voyez la note III.)

Soit (S), fig. 10, une sphère touchée en P par un plan (Π); supposons que tous les points de cette surface s'élèvent proportionnellement à leur hauteur sur (Π), sans changer de projection sur ce plan. Alors les cordes $\Delta\delta$ n'ayant pas changé, tandis que les hauteurs verticales $P\gamma$ ont cru proportionnellement entr'elles, les rayons $\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta\delta^2}{P\gamma}$ des sections normales en P auront tous varié dans un rapport inverse. Or, dans cette transformation, la sphère est devenue une surface du second degré et de révolution $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, ayant le point P pour sommet, et pour rayon de son cercle principal, $\omega\beta$ égal au rayon Ob de la sphère; tandis que $P\omega$, demi-axe de révolution, est avec le même rayon dans le rapport de variation des ordonnées. De là résulte ce premier théorème: « Le rayon de courbure des sections normales d'une surface du second degré de révolution, est au sommet P de la surface égal au quarré du demi-axe $\omega\beta$ étranger à ce sommet, divisé par le demi-axe $P\omega$ passant par ce sommet qui fait partie de l'axe de révolution. »

Valeurs des rayons de courbure des lignes du second degré.

Il suit immédiatement de là que le rayon de courbure d'une courbe du second degré $\alpha\beta P\beta\alpha$, fig. 11, est au sommet P de cette courbe, égal au quarré du demi-axe étranger au sommet, divisé

par la moitié de l'autre axe $\frac{(\frac{1}{2}\beta\omega\mathfrak{C})^2}{\frac{1}{2}P\omega\alpha} = \frac{\omega\mathfrak{C}^2}{P\omega}$. Mais si nous transportons le centre ω de cette courbe dans la direction de l'axe $\beta\omega\mathfrak{C}$, en ω', par exemple, l'axe $\beta\omega\mathfrak{C}$ deviendra $\beta'\omega'\mathfrak{C}'$ sans changer de longueur, et l'autre axe $P\omega\alpha$ deviendra $P\omega'\alpha'$ qui, dans la nouvelle courbe du second degré, n'est plus que le diamètre conjugué de $\beta'\omega'\mathfrak{C}'$. Or, d'après ce que nous avons démontré plus haut pour les surfaces, et qui est, à plus forte raison, vrai pour les lignes courbes, la nouvelle courbe $\alpha'\beta'P\mathfrak{C}'\alpha'$ est osculatrice en P de la primitive $\alpha\beta P\mathfrak{C}\alpha$; donc leur commun rayon de courbure en P est encore $\frac{\omega\mathfrak{C}^2}{P\omega} = \frac{\omega'\mathfrak{C}'^2}{P\omega}$, c'est-à-dire que *le rayon de courbure d'une ligne du second degré, en un point P quelconque, est égal au quarré du demi-diamètre $\omega'\mathfrak{C}'$ parallèle à la tangente de la courbe en P, divisé par $P\omega$ distance de ce diamètre au point P.*

Il est essentiel de retenir cette propriété générale des courbes du second degré, car nous en ferons par la suite un usage continuel.

Application aux surfaces du même ordre. Valeurs de leurs rayons de courbure et de ceux de leurs sections normales.

Considérons actuellement, en son sommet P, fig. 12, une surface quelconque du second degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$. Nous savons déjà que les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point, sont les deux sections principales sur lesquelles il est placé ; et comme ce point est en même temps le sommet de ces deux sections, on voit que *le quarré du plus grand ou du plus petit demi-axe, étrangers au sommet* P, *divisé par la moitié du troisième axe, est égal au plus grand ou au plus petit rayon de courbure en* P. Pour avoir en ce même sommet P, le rayon de courbure d'une section normale quelconque $\mu P\mu$, on déterminera le diamètre $\mu\nu\mu$ que le plan de cette section trace sur le plan principal étranger à P ; cela posé, *la troisième proportionnelle au demi-axe contenant* P, *et à la moitié de ce diamètre, sera le rayon demandé.*

Inclinons ensuite, de la manière la plus arbitraire, les ordonnées de cette surface, normales à (Π); pourvu qu'elles restent parallèles à une droite unique, mais quelconque, nous formerons une nouvelle surface du second degré $\left(\frac{\Sigma'}{2}\right)$ osculatrice en P à la primitive $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$. Le sommet P ne sera plus que l'extrémité d'un diamètre quelconque, et la section $\beta\mu\epsilon\mu\beta$ sera transportée en $\beta'\mu'\epsilon'\mu'\beta'$ parallèlement à sa position primitive et sans varier dans sa forme : donc, premièrement, les axes de cette section diamétrale $\beta'\mu'\epsilon'\mu'\beta'$ ne cesseront pas d'être parallèles à la direction en P des lignes de courbure de la surface; « les rayons de courbure de la nouvelle surface seront encore une troisième proportionnelle à la distance Pω de (Π) à la section $\beta'\mu'\epsilon'\mu'\beta'$, et respectivement à chaque demi-axe de cette section diamétrale : enfin, les rayons de courbure des sections normales quelconques, seront toujours une troisième proportionnelle à la distance Pω, et au demi-diamètre $\omega'\mu'$ parallèle au plan de la section normale, ainsi qu'au plan tangent (Π). »

Nous sommes donc en état, à présent, de déterminer pour une surface du second degré quelconque, et pour chaque point, ses rayons de courbure, ainsi que ceux de toutes ses sections normales; et comme les rayons des sections obliques ne sont, ainsi que nous le ferons bientôt voir, que les simples projections des premiers rayons, il n'est aucun point de cette surface où nous ne puissions déterminer la grandeur et la direction de ses deux courbures, ainsi que le rayon de courbure de toutes les sections qu'on peut faire par ce point sur la surface.

Les derniers résultats que nous venons de développer, se trouvent exposés, mais sans démonstration, dans un Mémoire sur la description des surfaces du second degré, inséré dans les journaux de l'École Polytechnique, tome VII, cahier XIV; seulement

ils y sont présentés sous une forme différente, parce que les quantités qu'on y considère sont désignées sous des dénominations particulières au travail dont ce Mémoire est l'objet : nous allons faire voir le plus rapidement possible, l'identité de ces diverses propositions.

Citation de quelques théorèmes relatifs à ces lignes et à ces surfaces.

Soit AB, fig. 13, une droite mobile dont deux points 1, 2, toujours les mêmes, soient assujétis à demeurer respectivement sur les droites *directrices* fixes OI, OII ; en concevant que cette droite prenne successivement toutes les positions qui peuvent satisfaire à cette hypothèse, chacun de ses points P décrira une courbe du second degré autour du point O comme centre.

Lorsque le point 1 glissant sur OI, arrive en O, le point 2 restant toujours sur OII, P s'applique aussi sur OII en Y. Au contraire, lorsque le point 2 arrive en O, le point 1 restant sur OI, P s'applique aussi sur OI en X ; et P1, P2, portions invariables de la droite mobile, sont par conséquent égales aux *directrices* OY, OX. Chaque courbe du second degré présente une infinité de semblables systêmes de génération. Enfin, dans le systême unique où les deux directrices OX, OY sont à angle droit, la courbe devient à la fois symétrique par rapport aux deux directrices, et elles sont évidemment ses axes mêmes.

Cela posé, en concevant la position de la droite mobile $1'P'2'$ où elle se trouve perpendiculaire à l'une des directrices, à OX, par exemple, P′ sera le plus loin possible de OX : donc, $1'P'2'$ sera normale en ce point à la courbe. Ainsi la tangente à la courbe en P′ étant alors perpendiculaire à $1'P'2'$, comme l'est OX, cet OX et la tangente en P′ seront parallèles ; donc OP′ sera le diamètre conjugué à OX. Or, le rayon de courbure de la courbe du second degré est en P′, $\frac{OX^2}{1'P'}$: donc il est aussi $\frac{OX^2}{OY}$ (puisque

 $OY = 1P = 1'P'$); c'est-à-dire, qu'étant donné un point quelconque P', sur une courbe du second degré, si on cherche le diamètre OX conjugué à celui passant en P', et qu'on le regarde comme une directrice, la troisième proportionnelle à cette directrice OX et à sa directrice conjuguée OY, sera le rayon de courbure demandé.

Tous ces résultats, en se généralisant dans l'espace, sont susceptibles d'être appliqués aux surfaces du second degré. Soit, fig. 14, une droite mobile AB sur laquelle on détermine trois points 1, 2, 3, toujours les mêmes. Si l'on assujétit le premier 1 à rester toujours sur un premier plan *directeur* I; le second 2, sur un second plan *directeur* II; le troisième 3, sur un troisième plan *directeur* III; en imprimant ensuite à la droite AB tous les mouvements compatibles avec cette hypothèse, chacun des points P de AB décrira une surface du second degré, dont le centre O sera la commune intersection des trois plans directeurs I, II, III.

En appliquant à ces surfaces ce que nous venons de dire sur les courbes du même degré, nous ferions voir facilement que les parties P1, P2, P3 de la droite mobile sont respectivement égales aux *directrices* OX, OY, OZ, comprises entre la surface XYZ et son centre O; que de plus chaque surface du second degré peut être produite par une infinité de pareils systêmes de plans *directeurs* I, II, III, au moyen d'une droite mobile convenable, etc.

Lorsque deux directrices OX, OY sont rectangulaires entr'elles, elles se confondent avec les axes de la courbe tracée par le point P sur le plan I, lieu de ces directrices (comme nous l'avons dit il n'y a qu'un moment, en parlant de la génération des courbes du second degré). Quand les plans directeurs I, II, III sont à angle droit, ils sont les plans principaux de la surface engendrée; et, dans tous les cas, chaque partie P1, P2, P3 est égale à la droite normale à la surface, et respectivement perpendiculaire au plan I, au plan II, au plan III.

On doit voir par là, que si l'on se propose d'obtenir les rayons de courbure de la surface en un de ses points P, fig. 15, il faut opérer ainsi : en menant le plan $XyOxY$ conjugué au diamètre POp ; en regardant ensuite les axes XOx, YOy de cette section comme les deux directrices placées sur le plan directeur (I), la troisième directrice OZ sera égale à la droite PM, à la fois normale en P à la surface, et en M à la section diamétrale OXY : enfin, les deux rayons de courbure de la surface en P, seront $\frac{OX^2}{PM}$, $\frac{OY^2}{PM}$, ou $\frac{OX^2}{OZ}$, $\frac{OY^2}{OZ}$.

Actuellement il est facile d'apercevoir l'identité des principes développés plus haut, avec les propositions suivantes, extraites du Mémoire que nous avons cité.

« Étant donné un point quelconque P sur une surface du second » degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$; si l'on conçoit le plan tangent en P à cette surface, » et la section diamétrale qui lui est parallèle ; puis qu'on déter- » mine les axes de cette section, c'est-à-dire, son système de » directrices orthogonales....

La droite menée par le point P parallèlement à la plus grande directrice, sera tangente à la ligne de moindre courbure.

La droite menée par le point P parallèlement à la plus petite directrice, sera tangente à la ligne de plus grande courbure.

« On regardera ces directrices de la section diamétrale comme » directrices de la surface elle-même ; d'après cela, la troisième » directrice sera la distance de P à la section diamétrale qui con- » tient les deux autres, et alors....

Une troisième proportionnelle à la dernière directrice et à la plus grande des deux autres, sera le rayon de moindre courbure.

Une troisième proportionnelle à la dernière directrice et à

1er MÉMOIRE. *la plus petite des deux autres, sera le rayon de plus grande courbure.*

Dans la note Ire du second Mémoire, nous présenterons ces mêmes valeurs par l'analyse, en les rapprochant de celles qui seraient fournies par les méthodes ordinaires du calcul différentiel; afin qu'on voie mieux l'avantage que présente la très-grande simplicité qui les rend propres, surtout, aux opérations graphiques de l'artiste et de l'ingénieur.

Valeurs des rayons des sections obliques des surfaces.

Jusqu'ici nous n'avons considéré dans les surfaces que leurs sections normales; il nous reste à nous occuper des sections obliques, pour en déterminer aussi la courbure, et compléter par là ce que nous avons à dire sur la recherche des rayons de courbure des surfaces, et de leurs sections quelconques.

Pour arriver à ce but, nous allons présenter deux méthodes différentes : l'une moins élémentaire, il est vrai, mais plus générale, et qui nous fournira l'occasion de déduire plusieurs propriétés nouvelles de l'étendue, comme conséquences des théorêmes que nous avons exposés au commencement de ce paragraphe; la seconde, plus simple, plus facile, suffisante enfin pour ceux qui voudront s'y borner, et se contenter de l'enchaînement le plus restreint des vérités qui leur sont plus particulièrement utiles.

Première méthode.

Propriétés générales des contacts.

La surface quelconque (S), fig. 16, étant osculée en P par une autre surface aussi quelconque (Σ), traçons sur la première la courbe arbitraire MPN; faisons ensuite varier cette surface avec toute la généralité que ses transformations comportent, sans que sa courbure en P cesse d'être la même; et nous avons vu qu'on peut le faire d'une infinité de manières différentes. Dans ces transformations diverses, la courbe MPN restant toujours sur une surface osculatrice de (S) et de (Σ), ne cessera pas elle-même d'osculer ces deux surfaces : cela est évident.

Mais d'après la généralité que nous avons donnée aux changements de forme dont est susceptible la surface (S), sans que sa courbure en P soit altérée, c'est-à-dire, sans qu'elle cesse d'être osculée en ce point par une surface primitive et invariable (Σ), il est également évident que toute surface (ʃ), circonscrite à (S) suivant MPN, sera susceptible d'être en entier parcourue par la courbe MPN, dans les transformations infinies que cette courbe peut éprouver sans cesser d'osculer à la fois (S) et (Σ).

On observera d'ailleurs que dans toutes les positions de la courbe MPN, sa tangente PT en P n'a pas cessé d'être la même, parce que dans le mouvement général des points de (S), tous les points du plan tangent demeurent immobiles, et qu'à partir immédiatement du point de contact, le déplacement des points de (S) est infiniment petit par rapport à leur distance à ce point : la tangente de MPN est donc restée constamment la même (*). Seulement le plan osculateur de la courbe MPN a pu prendre au point P

(*) Cette démonstration abrégée étant ici la seule qui puisse arrêter ceux qui ne seraient pas très-familiers avec les considérations géométriques infinitésimales, nous allons la rendre plus sensible en la développant un peu davantage.

Rappelons-nous que dans nos théorêmes sur la transformation des surfaces toujours osculatrices, la condition essentielle et permanente est que, à partir du point P, le déplacement des points de la surface primitive (S), ne soit pas infiniment plus grand que la distance de ces points au plan tangent en P. Soit donc M'PN', fig. 16 *bis*, la nouvelle position de MPN sur une des surfaces dérivées de (S) ; en menant par les points Δ et δ de MPN, et par les points correspondans Δ' et δ' de M'PN', les deux cordes Δδ, Δ'δ' éloignées du plan (Π), ou de la tangente PT, de distances Pγ, Pγ' infiniment petites du second ordre, les cordes Δδ, Δ'δ' seront nécessairement du premier ordre (si P n'est pas un point singulier). Mais, par hypothèse, les déplacements ΔΔ', δδ' ne peuvent être infiniment plus grands que Pγ ou Pγ' : ils sont donc au plus du second ordre, et par conséquent, le petit arc Δ'Pδ' est tangent en P au premier.

1er MÉMOIRE. successivement toutes les positions autour de cette tangente. Or, ce même plan coupe toujours (S) et (Σ) suivant deux courbes nécessairement osculatrices de MPN; puisque sans cela, MPN cesserait d'osculer ces surfaces. Donc (f) étant la surface engendrée par MPN, cette surface n'aura plus d'autres relations, 1°. avec (S), que de la *toucher* simplement suivant une courbe MPN, ayant PT pour tangente en P; 2°. avec (Σ), que de lui être tangente en P, et d'avoir seulement une certaine courbe MPN, osculatrice à (Σ), suivant une direction quelconque PT.

Et, ces seules conditions satisfaites, *toutes les sections possibles, faites à la fois dans* (S), *dans* (Σ), *et dans* (f), *par un même plan contenant* PT, *seront mutuellement osculatrices.*

Nous prouverions avec une égale facilité, et toujours en suivant la même marche, que *si deux surfaces quelconques* (S) *et* (f) *avaient dans toute l'étendue d'une courbe* MPN, *un contact d'un ordre* m, *toutes les sections possibles faites dans ces surfaces par un même plan, tangent à leur courbe de contact, auraient entr'elles un contact de l'ordre immédiatement supérieur* $m+1$.

Application aux contacts du second ordre.

Maintenant nous allons rendre sensibles ces généralités, en les appliquant seulement aux contacts du second ordre qui ont lieu entre des courbes placées sur des surfaces, ou simplement tangentes suivant toute une ligne courbe, ou simplement osculatrices suivant une seule direction, et n'ayant plus alors qu'un seul point de contact.

Exemple offert par les corps ronds.

Une sphère, par exemple, étant circonscrite par un cylindre, si, tangentiellement au grand cercle contact de ces surfaces, on suppose qu'un plan, d'abord normal aux deux surfaces primitives, s'incline de plus en plus vers le plan tangent, il coupera la sphère

suivant un cercle de plus en plus petit, le cylindre suivant une courbe du second degré de plus en plus grande, et cependant le cercle et la courbe du second degré ne cesseront pas d'être osculatrices.

Et si l'on regarde l'un des points de contact de la sphère et du cylindre comme le sommet d'une surface de révolution osculée en ce point par la sphère même, toutes les sections faites, à partir de ce sommet, par des plans tangents au cercle de contact des deux premières surfaces (la sphère et ce cylindre); ces sections, dis-je, seront également osculatrices des sections faites par les mêmes plans sur la surface générale de révolution. C'est la seule relation qu'auront conservée les courbures du cylindre et de la surface de révolution; car partout ailleurs qu'au sommet lieu du contact, ces surfaces ne seront même plus tangentes.

Dans ces deux exemples, la sphère est la surface (S), le cylindre la surface (f), et la surface de révolution la surface (Σ).

Conséquences générales relatives à la perspective et aux ombres.

Ces propriétés sont susceptibles de nombreuses applications dans les théories de la perspective et des ombres : nous nous contenterons pour le moment d'en offrir une seule.

Si, fig. 17, on mène dans la surface quelconque (S) un plan $PA_{,}$ qui la coupe normalement au point P, et qui soit parallèle au plan horizontal de projection, toutes les courbes PB, PC, PD, qui seront tracées sur (S) tangentiellement en P à ce plan normal, se projetteront horizontalement suivant des courbes $PB_{,}$, $PC_{,}$, $PD_{,}$ (Voyez note IV), *mutuellement osculatrices* en ce point; quoique dans l'espace leur rayon de courbure diminue de plus en plus à mesure que ce rayon s'incline vers le plan tangent.

Et plus généralement encore : si l'on projette sur un plan quelconque, fig. 18 (c'est ici le plan horizontal), le contour apparent d'une surface (S), toutes les courbes $PA_{,,}$, $PB_{,,}$ $PC_{,,}$..... seulement tangentes en P, au contour apparent $PO_{,,}$ se projetteront

 suivant des courbes PA_1, PB_1, PC_1....., qui toutes *osculeront* en P_1 le contour apparent PO_1, quelle que soit d'ailleurs et leur forme, et leur position, et la grandeur absolue de leur courbure dans l'espace.

Enfin, ces mêmes propriétés existeraient encore, si, au lieu de projections par lignes parallèles, ainsi qu'on peut les employer dans la détermination des ombres produites par la lumière solaire, il fallait se servir de projections coniques, comme cela a lieu dans la perspective, et les ombres produites par des points lumineux à distance finie des corps éclairés. « Toutes les courbes qui, sur le corps éclairé, seraient simplement tangentes à leur contour apparent, lorsque ensuite on les aura projetées ainsi sur des surfaces quelconques, y seront osculatrices de la projection du contour apparent. »

Concevons maintenant une surface générale (S), fig. 19, et traçons sur elle la courbe quelconque $\mu P\gamma$; concevons le cercle PA osculateur de cette courbe en un point P, et par ce cercle une sphère (Σ) tangente à la surface (S) au même point P. D'après les principes que nous venons d'exposer, deux sections faites arbitrairement sur (S) et (Σ) par un plan tangent en P à PA ou à $\mu P\gamma$, seront nécessairement osculatrices.

Donc, premièrement, *toutes les sections d'une surface, tangentes à la même courbe, et par conséquent à la même droite, en un point* P *de la surface, ont leurs cercles osculateurs sur une seule et même sphère* (*).

(*) Dans la figure 20, nous avons voulu rendre sensibles ces propriétés de la sphère par rapport aux sections obliques et normales des surfaces quelconques. La normale PΓ de la surface (S) est supposée parallèle aux deux plans de projection ; par conséquent, le plan tangent de (S) mené par le point P, est perpendiculaire à ces deux plans. Donc aussi, les points P_γ, P_1 sont sur les

Mais il est évident que le rayon descripteur même de la section plane, faite dans la sphère, est le rayon de courbure de la section faite dans la surface (Σ); or, si sur la sphère on fait, à partir du même point P, une section normale et une oblique, tangentes en ce point, on aura d'abord un grand, puis un petit cercle; et au point P de leur contact, le petit rayon sera la projection du grand rayon, sur le plan du petit cercle : donc, si deux sections planes d'une surface (Σ), l'une oblique, l'autre normale à la surface en un point P, sont tangentes en ce point, le *rayon de courbure de la section oblique sera, sur le plan de cette section, la projection du rayon de courbure de la section*

---

contours apparents de $(S)_v$ et $(S)_h$. Maintenant, par le point P menons une tangente horizontale PT_h, suivant laquelle nous ferons passer d'abord une section plane normale, puis toutes les sections obliques possibles, pour le point P. Ces plans couperont la surface (S) suivant des courbes dont les projections PmM_h, PnN_h, $Pn'N'_h$ seront quelconques, tandis que les autres projections PM_v, PN_v, PN'_v sont des lignes droites; ce qui doit être, puisque les plans où ces courbes sont tracées sont perpendiculaires au plan vertical de projection.

Soit PmM_h la section normale, et C le centre de son cercle osculateur PaA; d'après ce que nous avons démontré, toute section oblique PN, PN', a pour cercle osculateur PbB_{rr} celui dont le rayon Pc_v est (sur le plan de la section oblique) la projection du rayon PC_v de la section normale. D'ailleurs, il est évident que tous ces cercles PbB forment une sphère (Σ) dont PaA est le grand cercle.

Or, le petit cercle PbB_{rr} se projette horizontalement suivant une ellipse PbB_h dont nous pouvons obtenir immédiatement le rayon de courbure; car P est le sommet du petit axe, et le demi-grand axe bc_h est précisément égal au rayon Pc_v du cercle projeté. Donc le rayon cherché $= \frac{bc^2}{Pc} \ldots\ldots_h = \frac{Pc^2}{P\gamma} \ldots\ldots_v$. Mais dans le triangle rectangle PcC_v, il est évident que $\frac{Pc^2}{P\gamma} = PC$. Donc le rayon de courbure de l'ellipse PbB_h est en P précisément égal au rayon PC du cercle osculateur de la section normale.

Ier MÉMOIRE. *normale.* Telle est la loi extrêmement simple qui lie la détermination des rayons de courbure des sections obliques des surfaces, à la même détermination pour les sections normales.

Seconde méthode, par les osculatrices du second degré.

Nous aurions pu parvenir à ce dernier résultat d'une manière plus immédiate, en considérant la surface du second degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, fig. 12, osculatrice en P de la surface générale (S). En effet, inclinons les ordonnées de $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, sans altérer leur parallélisme, et sans que les points d'application cessent d'être à la même distance du plan (Π) tangent en P à cette première surface du second degré; nous savons que la nouvelle, $\left(\frac{\Sigma'}{2}\right)$, produite ainsi, osculera $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, et par conséquent la primitive (S), au point P. Par cette transformation, la section normale $\mu P \mu$ de $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ deviendra une section oblique $\mu' P \mu'$ sur $\left(\frac{\Sigma'}{2}\right)$, et ces deux courbes auront en P la tangente commune PT parallèle aux diamètres égaux $\mu\mu$, $\mu'\mu'$: cela est évident. Mais ω étant le centre de $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ et ω' celui de $\left(\frac{\Sigma'}{2}\right)$, les rayons des courbes du second degré $\mu P \mu$ et $\mu' P \mu'$ seront, ainsi que nous l'avons fait voir, $P\Gamma = \frac{\omega\mu^2}{P\omega}$; $P\Gamma' = \frac{\omega'\mu'^2}{P\omega'}$; et, puisque $\omega\mu = \omega'\mu'$, on voit que ces deux rayons sont réciproquement entr'eux comme $P\omega$ et $P\omega'$; c'est-à-dire, que le rayon $P\Gamma'$ de la section oblique sera le rayon de la section normale $P\Gamma$, projeté sur le plan de cette section oblique. Enfin, comme ces deux sections de $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ et $\left(\frac{\Sigma'}{2}\right)$ sont osculatrices aux sections faites par les mêmes plans sur la surface générale (S) (puisqu'elle-même est complettement osculée par ces deux surfaces), nous devrons en conclure la relation des sections obliques aux sections normales, à laquelle nous sommes parvenus par des considérations plus longues, mais plus générales, et qui remplissaient d'autres vues.

§ IV.

Théorie des tangentes conjuguées.

Considérations sur les plans tangents, relatives à la courbure des surfaces.

Jusqu'ici nous n'avons, pour ainsi dire, considéré les surfaces que dans leur forme intérieure. Nous les avons coupées dans tous les sens possibles, et nous avons déterminé tout ce qui pouvait être relatif à leurs sections diverses, à leurs normales, à leur courbure. Mais, si la courbure des surfaces peut être également connue par la flexion plus ou moins grande des courbes tracées sur elles, ou par l'inclinaison successive des normales l'une sur l'autre, elle peut l'être de même par la détermination des diverses positions dont sont susceptibles les plans tangents, sur la surface qu'ils touchent. Nous venons, si je puis parler ainsi, d'anatomiser les surfaces et de les décomposer dans leurs dernières parties; rendons-leur actuellement leur forme entière, et voyons de quelle manière nous pourrons marcher sur elles dans les directions successives de leurs plans tangents.

Des surfaces développables circonscrites aux surfaces à double courbure.

Concevons que par un point quelconque p d'une surface (S), fig. 21, on mène le plan (Π) tangent à cette surface, et que sans quitter ce plan on veuille passer sur le plan immédiatement consécutif (Π′) tangent à (S) au point p' pareillement consécutif à P, on ne pourra le faire que suivant l'intersection P′A′ de ces deux plans; de même pour passer du plan (Π′) à celui (Π″) tangent à (S) en p'' consécutif à p', il faudra marcher sur l'intersection P″A″ de ces deux plans, et ainsi de suite. Le système des intersections P′T′, P″T″, P‴T‴,... formera, comme on sait, une surface developpable, et il est évident que la forme de la surface (S) aura, avec celle de la développable, et de leur courbe de contact PP′P″P‴,..., une relation nécessaire; puisque la détermination de la première

Ier MÉMOIRE. de ces grandeurs graphiques et d'une des deux autres, entraîne forcément celle de la troisième. Cherchons donc à connaître plus particulièrement en quoi peut consister cette relation : nous désignerons ordinairement par (D) la surface développable circonscrite à la surface (S), et composée de toutes les tangentes PT, P'T', P''T'',....

Relation nécessaire entre la direction de leurs arêtes et celle de leur courbe de contact sur la surface à double courbure qu'elles circonscrivent.

Soit mené à (S), fig. 22, par un de ses points P, la tangente indéfinie PT, et concevons toutes les développables (D), (D'), (D'').... qui, circonscrites à la surface générale (S), ont seulement en commun l'arête PT. Chaque développable (D), (D'), (D''),.... aura avec (S) une courbe de contact $P\varphi$, $P\varphi'$, $P\varphi''$,....; or, je dis que toutes ces courbes seront mutuellement tangentes en P.

En effet, l'arête PT d'une développable (D) est l'intersection de deux plans tangents (Π), (Π') immédiatement consécutifs (*), et cette droite étant supposée rester la même pour toutes les développables que l'on considère, elles auront toutes les deux, mêmes plans tangents (Π), (Π'); et par conséquent les points p, p' de contact de ces

(*) L'esprit de la méthode des infiniment petits est de regarder les surfaces développables, circonscrites à des surfaces quelconques, comme l'ensemble d'une infinité de zônes planes infiniment étroites; alors les arêtes de la surface développable sont les intersections, et, si je puis parler ainsi, les *sutures* de ces zônes ; alors encore la surface développable est, pour la surface à double courbure, ce qu'est pour une ligne courbe quelconque, un polygone circonscrit, et d'une infinité de côtés.

On voit parfaitement que, d'après cette manière de concevoir la surface développable (D), fig. 22, chacune des zônes planes qui sont unies par l'arête PT, touchant la surface générale en un point (sur la courbe de contact de la surface générale et de la développable), deux zônes immédiatement consécutives déterminent deux points infiniment voisins p,p' de la courbe de contact, et par conséquent sa tangente $pPp't$. Donc, pour toutes les surfaces développables possibles

plans avec (S), seront les mêmes pour toutes les (D). Donc toutes les courbes de contact auront en commun les deux points immédiatement consécutifs p, p'; donc elles se toucheront toutes à partir de ces points, ou de P : ce que nous voulions démontrer.

Si, par exemple, on suppose que toutes les développables (D) doivent être coniques; quelque position que prenne sur PT le centre du cône, quoique la courbe de contact change de forme chaque fois avec la position du centre du cône, la tangente $pPp't$ à toutes les courbes de contact, ne changera pas pour cela.

Les droites PT, Pt ont donc entr'elles une relation nécessaire; elles sont telles que quand l'une d'elles est déterminée, l'autre l'est pareillement : la position réciproque de ces droites doit dépendre de la forme de la surface (S) en P; et comme nous cherchons constamment à connaître cette forme, ce sera dans une telle recherche un pas de fait, que d'avoir déterminé les relations qu'ont entr'elles les arêtes PT des développables (D), et les tangentes Pt à leurs lignes de contact sur (S).

Supposons que PT, P'T, fig. 23, soient deux arêtes consécutives de la surface développable (D), et soit PP't la tangente à la courbe de contact; soit ensuite la droite $P_{,}P'_{,}t$, menée par les seconds points $P_{,}$ et $P'_{,}$, que les arêtes PT, P'T ont de commun avec la surface (S); cette droite coupera évidemment PP't. Si donc on regarde ces deux droites comme les arêtes d'une nouvelle surface développable (Δ), la droite $PP_{,}T$ deviendra la tangente à la courbe de contact de (Δ) sur (S). Donc les deux droites PT, Pt sont réci-

---

(D), (D'), (D''),...., circonscrites à la surface (S), et qui ont en commun l'arête PT, les courbes de contact Pφ, Pφ', Pφ''.... sont tangentes en P.

Je suis entré dans ces détails qu'on trouvera peut-être superflus ; mais c'est afin d'aller au devant de toute objection qui pût avoir même une apparence de fondement, et de prévenir, dans l'esprit des Élèves, des doutes qui les arrêtent et quelquefois les dégoûtent.

Tangentes conjuguées. Leur définition.

proquement arête et tangente des surfaces développables (D),(Δ), et de leurs courbes de contact sur (S) : nous les nommerons pour ce motif *tangentes conjuguées*, et plus bas, nous présenterons encore d'autres raisons de cette dénomination.

Utilité de leurs applications.

La considération de ces *tangentes conjuguées* pourra devenir d'un très-fréquent usage dans les opérations de la géométrie descriptive. Ainsi, par exemple, il est facile de voir dans les théories de la perspective et des ombres, que la direction du rayon visuel ou du rayon lumineux, et celle du contour apparent, ou de la ligne séparation d'ombre et de lumière, sont, pour chaque point de ce contour ou de cette ligne, les directions d'un systême de tangentes conjuguées. La connaissance des rapports qui lient les tangentes de semblables systêmes, conduira donc immédiatement à la détermination des éléments les plus délicats des ombres et de la perspective. C'est ce dont nous offririons plus tard un exemple remarquable, en nous proposant de déterminer sur la vis rectangulaire, la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Mais la coupe des pierres et la catoptrique nous offriront des applications plus remarquables encore.

Offrons un autre exemple. Lorsqu'une batterie rasante est placée sur une colline, la ligne magistrale ou la direction de la batterie est la courbe de contact d'une surface développable, circonscrite au terrein de la colline, et qui va tracer en avant la ligne de démarcation des points soumis au feu de la batterie, et de ceux, au contraire, qui s'en trouvent *défilés* par la seule configuration de la colline. La ligne des feux dirigés sur cette développable, et la direction de la batterie, forment précisément un systême de tangentes conjuguées sur la surface de la colline. Donc, cette ligne de feux étant connue, pour *enfiler* la batterie par d'autres feux, il faudra se diriger sur la tangente conjuguée à cette ligne. Je n'offre cet exemple que pour rendre mes idées sensibles aux officiers

familiarisés avec les considérations militaires, parce qu'une telle méthode ne convient jamais qu'aux recherches du cabinet, ou bien à des tracés faits à loisir; mais à la guerre, il faut suivre une toute autre marche. Revenons à notre théorie. 1er MÉMOIRE.

Leurs propriétés relatives aux contacts du second ordre et à la courbure des surfaces quelconques.

Si à la surface (S), fig. 24, on substitue l'une (s) de ses osculatrices en P, les points immédiatement consécutifs P et P′ seront communs aux deux surfaces; les plans tangents en ces points à (S) et (s) seront les mêmes; et par conséquent aussi l'arête PT intersection de ces plans: donc la surface (s) aura la même arête PT que (S) pour toutes les développables (d), (d'), (d'') qui la circonscrivent, lorsque la tangente PP′t sera la même *pour les deux séries de surfaces* (D), (D′), (D″),.... et (d), (d'), (d''),....

Déduites du simple examen des surfaces osculatrices du second degré.

Nous pouvons donc, dans la recherche des rapports qui lient entr'elles les positions des tangentes conjuguées, substituer à la surface générale (S), l'une quelconque de ses osculatrices. Et comme nous avons fait voir qu'une infinité de celles-ci pouvaient être du second degré, il nous suffira d'observer quelles relations ont entr'elles les tangentes conjuguées sur les surfaces du second degré, pour connaître ces mêmes relations sur les surfaces les plus générales.

Afin de rendre nos recherches plus simples, si nous observons que quelle que soit la surface développable (D) ayant PT pour arête, Pt n'en est pas moins sa tangente conjuguée, nous supposerons cylindriques toutes les développables dont nous allons circonscrire les surfaces du second degré; et les résultats auxquels nous parviendrons, n'auront rien perdu de leur généralité par cette hypothèse.

Si une droite, constamment parallèle à sa position primitive, se meut de manière à rester dans chacune de ses positions, tangente à une même surface du second degré, cette droite, dans son

mouvement, engendrera un cylindre circonscrit à la surface du second degré ; leur courbe de contact sera plane, concentrique à cette surface, etc. : enfin, l'axe du cylindre sera pour la surface du second degré, le diamètre conjugué au plan de cette courbe.

Soit donc, fig. 25, une surface quelconque $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ du second degré, O son centre, $\mu O\nu$ l'axe du cylindre, et APBE la courbe de contact des deux surfaces. Par un point P quelconque de cette courbe, menons l'arête PT du cylindre, et la droite Pt tangente au même point à la courbe de contact, ces deux droites PT, Pt seront ce que nous avons nommé *deux tangentes conjuguées ;* elles formeront un système de *tangentes conjuguées.*

Cela posé, si par le centre O de la surface nous menons le diamètre AOB conjugué à POE, relativement à la courbe de contact APBE, ce diamètre sera parallèle à la tangente Pt; c'est la première propriété des diamètres conjugués. Mais le diamètre $\mu O\nu$ étant, relativement à la surface du second degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, conjugué à la courbe de contact APBE ; AOB, $\mu O\nu$ sont eux-mêmes deux diamètres conjugués de la section AμBν parallèle au plan (Π) tangent à la fois en P au cylindre et à la surface du second degré.

Analyse de la courbure des surfaces quelconques ramenée à la discussion des lignes du second degré, dont les diamètres conjugués sont les tangentes conjuguées de ces surfaces.

Si maintenant nous transportons la courbe AμBν sur le plan (Π) et parallèlement à sa position primitive, de manière que le centre O se place au point P, les deux diamètres conjugués $\mu O\nu$, AOB étant respectivement parallèles aux deux tangentes conjuguées, s'appliqueront sur elles ; et ces tangentes deviendront les diamètres conjugués d'une courbe A'μ'B'ν' égale à AμBν, et semblablement placée dans l'espace.

Si l'arête PT avait pris sur le plan tangent (Π) une autre direction PT', sa *tangente conjuguée* Pt' aurait pris également une autre position, mais n'aurait pas cessé de former avec elle un système de

diamètres conjugués de la courbe $A'\mu'B'\nu'$. Donc, lorsque l'arête PT devient l'un des axes de la courbe $A'\mu'B'\nu'$, P*t* devient l'autre axe ; et les tangentes conjuguées sont alors les deux tangentes des lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface : donc aussi les rayons de courbure des deux sections normales dirigées suivant les tangentes conjuguées orthogonales, sont les rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface.

Nous avons représenté dans les figures 26 et 27, le système de ces tangentes conjuguées : $\alpha P\mathcal{C}$, $\mu P\nu$ sont les axes de la courbe du second degré ; ce sont les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en P à angle droit ; $\alpha' P\mathcal{C}'$, $\mu' P\nu'$ et $\alpha'' P\mathcal{C}''$, $\mu'' P\nu''$ sont deux autres systêmes de diamètres conjugués qui correspondent à deux systêmes de tangentes conjuguées.

Mais tous ces résultats, ainsi que nous l'avons prouvé d'avance, sont également applicables aux surfaces les plus générales. On voit donc, enfin, qu'*en chaque point* P *d'une surface, quelle qu'elle soit, la forme de cette surface sera toujours telle, qu'on pourra trouver une courbe du second degré, qui placée sur le plan tangent en* P, *ait ce point* P *pour centre, et présente dans chacun de ses systèmes de diamètres conjugués, un systême de tangentes conjuguées de la surface générale.*

Alors le systême des diamètres conjugués rectangulaires, c'est-à-dire, celui des axes, sera le systême de deux tangentes conjuguées respectivement tangentes en P *aux lignes de plus grande et de moindre courbure*, etc.

Voilà principalement les raisons qui nous ont fait donner aux arêtes PT des développables (D), et aux tangentes P*t* à la courbe de contact de ces développables sur la surface générale, la dénomination de *tangentes conjuguées*, que d'ailleurs la réciprocité de ces lignes eût suffi seule pour motiver.

Nous savons que OM, fig. 25, étant la distance du plan tangent

Ier MÉMOIRE. au centre de la surface du second degré $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ osculatrice de la surface générale (S), le rayon de courbure de la section normale de (S), faite suivant la direction quelconque $P\mu'$, est égal à $\frac{P\mu'^2}{OM}$; la courbe $A'\mu'B'\nu'$ étant égale à la section faite parallèlement à son plan, et par le centre O dans la surface $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$. Mais $P\mu'$ et PB' étant deux demi-diamètres conjugués d'une courbe du second degré, la somme de leurs quarrés $P\mu'^2 + PB'^2$ est constante quel que soit le système des diamètres conjugués.

Nous pouvons donc conclure généralement, et pour chacun des points d'une surface quelle qu'elle soit, que *la somme des rayons de courbure des sections normales à la surface en ce point, prises deux à deux, et dirigées suivant deux tangentes conjuguées, est constante, et égale à la somme même des deux rayons de courbure de la surface au point que l'on considère.*

De l'indicatrice.

Suivant que la courbe $A'\mu'B'\nu'A'$ sera d'une forme différente, la surface (S) elle-même variera dans la forme de sa courbure au point P; et l'on épuisera toutes les formes de courbures possibles, en supposant successivement à la courbe du second degré $A\mu B\nu A$ toutes les formes dont elle est susceptible. Ainsi, la seule discussion des courbes du second degré nous indiquera tout ce que peut présenter l'examen de la courbure des surfaces quelconques : voilà pourquoi, en considérant cette courbe relativement à la courbure de la surface (S), nous l'appellerons *indicatrice*.

Elle fait complètement connaître la forme de la courbure des surfaces.

Appliquons donc, d'une manière générale, cette discussion des courbes du second degré, à l'examen des formes que présente la courbure des surfaces.

Sa symétrie.

Toute courbe du second degré, fig. 25 et 26, ayant un centre P, est symétrique par rapport à ses deux axes $\alpha P\mathcal{C}$, $\mu P\nu$. De manière

que ses quatre parties comprises dans les 400° qui remplissent l'espace autour de ce point, sur le plan (Π) de cette courbe, sont deux à deux symétriques et deux à deux superposables.

1er MÉMOIRE.

Symétrie de la courbure des surfaces.

Donc aussi la courbure des surfaces, à partir d'un seul et même point P, est toujours symétrique par rapport aux deux directions de plus grande et de moindre courbure; et les quatre éléments de la surface compris entre ces deux directions, sont deux à deux symétriques et deux à deux superposables, de manière que les parties superposées ont entr'elles un contact du second ordre.

Car à chaque demi-diamètre δ compris dans un quart du plan (Π), correspondent trois autres demi-diamètres δ', Δ, Δ', symétriquement placés avec lui par rapport aux axes, et tels que $\delta=\delta'=\Delta=\Delta'$. Donc les rayons des sections normales faites suivant la direction de ces demi-diamètres, seront proportionnels aux quantités $\delta^2=\delta'^2=\Delta^2=\Delta'^2$: ils seront donc égaux, et les quatre parts de la surface, superposées, seront mutuellement osculatrices.

Considérons maintenant les propriétés des courbes du second degré, qui sont particulières à chaque espèce de ce genre.

Les surfaces présentent deux genres bien distincts de courbures.

En général, une courbe du second degré, dont le centre P nous est donné, ne peut être qu'une ellipse ou une hyperbole. Elle peut cependant être une parabole : alors elle se présente sous la forme de deux lignes droites parallèles *équidistantes de leur centre.* (Nous examinerons en particulier ce cas remarquable.)

Premier genre. Formes à indicatrices elliptiques, présentant toutes leurs courbures dans le même sens, à partir d'un même point.

Si la courbe indicatrice $\alpha\mu\zeta\nu$, fig. 26, est une ellipse, tous les diamètres sont réels, tous leurs quarrés de même signe, et tous les rayons de courbure des sections normales de la surface (S), dirigés par conséquent dans le même sens : enfin, la somme des rayons des sections dirigées suivant deux tangentes conjuguées, est constante et égale à la somme des rayons de courbure de la surface même au point P.

Ier MÉMOIRE.

Second genre.

Formes à indicatrices hyperboliques, présentant constamment, en sens contraires, leurs courbures conjuguées.

Mais lorsque la courbe indicatrice est une hyperbole, fig. 27, partie de ses diamètres sont réels et tous leurs conjugués imaginaires; partie des rayons des sections normales, positifs; partie négatifs; un rayon de courbure de la surface, est d'un côté du plan tangent, le second rayon est de l'autre côté : deux rayons de sections normales conjuguées, sont toujours de côtés opposés par rapport au plan tangent : enfin, c'est leur différence au lieu de leur somme qui devient constante, et égale à la différence, au lieu de la somme des deux rayons de courbure.

Les surfaces sont donc susceptibles de présenter deux genres de courbure bien distincts : dans le premier, les deux courbures sont dans le même sens; elles sont en sens contraire dans le second. Une partie des rayons des sections normales est dans un sens, et les rayons de leurs conjuguées passent à la fois ou du même côté du plan tangent, ou de l'autre côté, dans le premier ou dans le second genre de courbure : de sorte que suivant l'un ou l'autre cas, c'est ou la somme ou la différence des rayons des sections conjuguées qui devient constante et égale à la somme ou à la différence des rayons de courbure au même point. Les surfaces du premier genre sont osculées par des ellipsoïdes, et par des hyperboloïdes à deux nappes ou elliptiques, les surfaces du second genre le sont par des hyperboloïdes hyperboliques ou à une nappe.

Remarquons, en passant, que l'*indicatrice* est tellement propre à *indiquer*, à caractériser la forme de la courbure des surfaces, que, sans connaître cette courbe, les dénominations les plus heureuses qu'on ait trouvées, s'identifient avec celles que la considération de cette courbe nous a conduit à choisir. En effet, l'ellipsoïde et l'hyperboloïde *elliptique* jouissent l'un et l'autre de la propriété d'avoir dans tous leurs points leur *indicatrice elliptique;* tandis que le paraboloïde et l'hyperboloïde *hyperboliques*, ont dans tous leurs points leur *indicatrice hyperbolique*.

1er MÉMOIRE.

Des asymptotes de l'indicatrice.

Arrêtons-nous un moment sur ce dernier genre. Lorsque l'indicatrice est une hyperbole, les deux asymptotes de cette hyperbole sont pour la surface deux lignes infiniment remarquables. Et d'abord, chacune d'elles représentant seule un système de *deux* diamètres conjugués, transportée sur la surface, elle représentera seule un système de deux tangentes conjuguées.

Leurs propriétés.

Par conséquent, dès qu'une surface développable (D) sera circonscrite à la surface générale (S), et qu'une de ses arêtes sera dirigée suivant une asymptote de l'indicatrice, la courbe de contact de cette développable et de la surface générale, sera tangente à cette même asymptote au point qui lui correspond sur la surface générale.

Applications. Aux ombres.

Ainsi la ligne séparation d'ombre et de lumière se confond avec le rayon lumineux, partout où les deux courbures du corps éclairé, se trouvant en sens contraire, ce rayon est dirigé suivant une asymptote des indicatrices du corps éclairé.

A la perspective.

Et le contour apparent d'un corps mis en perspective sur une surface quelconque, se confond pareillement avec le rayon visuel, quand ce rayon est dirigé suivant une asymptote des indicatrices du corps représenté.

Aux surfaces du second degré.

Les surfaces hyperboliques du second degré, c'est-à-dire, celles dont les deux courbures sont dirigées en sens contraires, offrent à cet égard des particularités remarquables. Le plan tangent coupant nécessairement les surfaces dont les deux courbures principales sont opposées, le plan tangent aux surfaces hyperboliques du second degré les coupera suivant une ligne du second degré, à laquelle seront tangentes les deux asymptotes de l'indicatrice. Or, une ligne du second degré ne peut avoir deux tangentes en un seul point, sans se confondre avec ces deux tangentes : d'où résulte cette belle propriété des surfaces hyperboliques du second



degré : *par chaque point de ces surfaces, passent toujours deux droites tout entières placées sur elles.*

Mais les deux asymptotes sont symétriquement placées par rapport aux deux axes; donc, dans les surfaces hyperboliques du second degré, *les droites d'une génération font avec les lignes de courbure, un angle égal à celui que les droites de l'autre génération font avec les mêmes lignes, dans l'aire du plan tangent supplémentaire à celle occupée par les premières droites.*

Enfin, si l'on plaçait un point lumineux sur une de ces surfaces, les deux rayons dirigés suivant les deux droites génératrices qui se croisent en ce point, seraient partout tangents à la ligne séparation d'ombre et de lumière : elles seraient donc cette ligne elle-même; et la surface serait ainsi divisée, par elles, en quatre parties alternativement éclairées et dans l'ombre.

Retour aux cas général.

Revenons aux surfaces générales. Chaque asymptote de l'indicatrice, avons-nous dit, représente seule un système de tangentes conjuguées; chaque asymptote est infinie : tous les rayons osculateurs des sections obliques et normales dirigées suivant les asymptotes, sont donc eux-mêmes infinis. Donc les asymptotes de l'indicatrice ne sont pas simplement tangentes à la surface, elles l'osculent; et toute section oblique ou normale faite dans la surface par une de ces asymptotes, est osculée par la même asymptote : cela est évident.

Cette direction où la courbure est nulle et les rayons infinis, est précisément la limite des courbures positives et des courbures négatives.

Des deux courbures égales.

Pour completter ce que nous avons dit sur les surfaces dont les deux courbures sont dirigées soit dans le même sens, soit en sens opposés, il nous faudrait encore examiner un cas extrêmement remarquable; c'est celui où les deux courbures deviennent égales.

Mais comme nous aurons à le discuter avec détail dans les IIe, IIIe et IVe Mémoires de cette partie théorique, nous croyons ne pas devoir présenter encore les propriétés de la courbure des surfaces qui appartiennent à ce cas, afin de n'avoir pas trop souvent à nous répéter dans le cours de ces Développements.

1er MÉMOIRE.

Contentons-nous de dire actuellement qu'on reconnaît les points où l'égalité des deux courbures a lieu, dans la première espèce de surfaces, parce qu'alors l'indicatrice devient un cercle; et dans la seconde espèce, parce qu'alors elle devient une hyperbole équilatère. Par cette dernière hypothèse, la surface n'est plus simplement partagée en quatre parts symétriques et superposables deux à deux, mais en huit parties symétriques, superposables quatre à quatre : les 400° de l'espace compris sur le plan tangent autour du point de contact, sont divisés en huit parties de 50°, similiformes, par les deux asymptotes de l'indicatrice.

Alors l'indicatrice est un *cercle*, ou une *hyperbole équilatère*.

Maintenant, il nous reste encore à considérer une espèce de surfaces qui forme, pour ainsi dire, le passage entre les deux genres que nous venons d'examiner. La courbe indicatrice, au lieu d'être une ellipse ou une hyperbole, peut être une parabole.

Or, pour qu'une surface du second degré soit telle qu'une section BμA, fig. 28, parallèle au plan (Π) tangent en P, soit une parabole, il faut que cette surface soit un cône ou un cylindre (*); tout autre paraboloïde ne pourrait satisfaire à cette condition. L'arête PTt de ce cône ou de ce cylindre est parallèle à l'axe ou au diamètre $\mu\nu$ des sections paraboliques parallèles à (Π) : donc la surface générale (S) dont l'indicatrice est une parabole, est

Espèce intermédiaire. Surfaces à indicatrices paraboliques, ayant une de leurs courbures nulle : surfaces développables.

(*) Le système de deux droites parallèles est une parabole ; et le cylindre lui-même est un cône. Ainsi, nous aurions pu nous dispenser d'en faire mention.

osculée par un cône ou un cylindre. Alors les deux tangentes conjuguées PT, Pt se réunissent en une seule droite PTt parallèle à l'axe de la parabole : c'est l'arête même du cône. Cette tangente unique oscule la surface générale (S), au lieu de la toucher simplement ; par conséquent, la surface générale est développable autour de cette tangente, à partir du point de contact.

Ainsi les surfaces développables sont le degré intermédiaire qu'il faut franchir pour passer des surfaces dont les deux courbures sont dans le même sens, aux surfaces dont les courbures sont en sens contraires ; et, dans ce point de passage, l'une des courbures devient nulle : c'est ce qui a lieu parce qu'on doit passer du positif au négatif.

Quelque compliquée que soit en apparence la discussion générale de la courbure des surfaces, on peut donc toujours la ramener au seul examen des courbes du second degré, dont les divers éléments nous sont connus dans tous leurs rapports.

Construction des tangentes conjuguées par un mouvement continu.

Supposons qu'on projette obliquement la courbe indicatrice, de manière à ce que sa projection soit un cercle ; et cela est toujours possible lorsque cette indicatrice est elliptique. Les diamètres conjugués se projetteront à angle droit, puisqu'ils deviendront conjugués à un cercle. De là nous conclurons cette proposition générale : « Sur une surface quelconque (S), fig. 25, et pour chacun de ses » points P où les deux courbures sont dans le même sens, on peut » toujours trouver dans le plan normal de moindre courbure de » la surface, deux droites PV, PV', symétriquement placées par » rapport à la normale en ce point, et telles qu'en regardant ou l'une, » ou l'autre comme l'intersection constante de deux plans ortho- » gonaux mobiles, ces deux plans, dans chacune de leurs positions » simultanées, couperont le plan tangent en P, suivant deux *tan-* » *gentes conjuguées* de la surface en ce point. » Telle est la relation que nous cherchions à rendre sensible par une description géo-

métrique. Cette propriété est remarquable par l'usage dont elle peut être dans la catoptrique. Mais dans l'application que nous ferons à cette science, des principes de la courbure des surfaces, nous la présenterons sous un nouveau jour; et nous développerons davantage la théorie des tangentes conjuguées, qu'on verra servir de fondement à presque toutes les applications qui seront l'objet de la seconde Partie de ces Mémoires.

Application des propriétés des tangentes conjuguées à la détermination des élémens de la courbure des surfaces.

La forme des surfaces, à partir de leurs divers points, ne peut être donnée que par la connaissance des lignes courbes qui, tracées sur elles, viennent se croiser aux points que l'on considère. Ainsi, nous avons prouvé au commencement de ce travail, que trois courbes étaient nécessaires, et suffisaient à la détermination complette de la courbure d'une surface qui les contient, au point P qui leur est commun. Nous sommes en état maintenant d'effectuer cette détermination, et c'est ce que nous allons nous proposer de faire.

Soient P1, P2, P3, fig. 29, trois courbes tracées sur une surface quelconque (S), et PO_1, PO_2, PO_3 leurs rayons de courbure en P. On regardera ces rayons comme projetés par trois parties $P\omega_1$, $P\omega_2$, $P\omega_3$ de PΩ, normale à la surface; celles-ci seront les rayons de courbure des trois sections normales de (S), tangentes en P aux courbes données P1, P2, P3. On prendra sur les tangentes PA, PB, PC de ces courbes, les points A, B, C, tels que PA^2, PB^2, PC^2 soient proportionnelles aux rayons $P\omega_1$, $P\omega_2$, $P\omega_3$. La courbe du second degré ayant P pour centre, et passant par les points A, B, C, sera précisément pour le point P l'indicatrice de la surface (S). Les axes de cette courbe seront les tangentes aux lignes de courbure, ce qui en fera connaître la direction; les rayons de ces lignes, comme ceux de toutes les sections normales, seront déterminés au moyen des diamètres de la courbe A, B, C, et de ses axes: dès-lors, on

Ier MÉMOIRE. sera donc en état de connaître aussi la courbure de telle section oblique qu'on voudra.

Exemple offert par les formes de la carène des vaisseaux.

Les formes des vaisseaux nous sont données dans leur devis ou leur tracé, d'abord par un premier système de courbes verticales appelées *couples;* ensuite par un second système de courbes obliques et longitudinales appelées *lisses;* enfin, par un dernier système de lignes horizontales appelées *lignes d'eau.* La forme de la surface des vaisseaux en chaque point, est donc indiquée par trois lignes courbes qui s'y croisent; et comme ce nombre est celui nécessaire à la détermination de la courbure des surfaces, nous pourrons toujours immédiatement, avec ces seules données, déterminer sur la surface des vaisseaux, et pour quelque point que ce soit, la direction des lignes de courbure et celle des tangentes conjuguées; la grandeur des rayons de courbure de la surface et celle de toutes les sections possibles, obliques ou normales. Il semble que ces diverses déterminations peuvent, dans plusieurs circonstances, devenir d'un assez grand intérêt.

Lorsque nous avons considéré les surfaces développables normales aux surfaces générales, nous avons vu qu'elles avaient, avec les lignes de courbure, des relations nécessaires très-remarquables. Maintenant que nous avons considéré de plus les surfaces développables circonscrites ou tangentes aux surfaces quelconques, il est naturel de rechercher si celles-ci ne présentent pas également quelques propriétés particulières, lorsqu'on les suppose appartenir aux lignes de courbure de la surface générale (S), c'est-à-dire, la toucher suivant ces lignes de courbure : c'est aussi ce que nous allons faire.

Des surfaces développables conjuguées aux lignes de courbure.

Lorsqu'en chaque point P de la surface (S), les deux tangentes conjuguées qui s'y croisent à angle droit, sont tangentes aux deux

lignes de courbure de la surface en ce point, il s'ensuit que si on regarde une ligne quelconque de courbure comme la courbe de contact d'une surface développable (D), circonscrite à la surface générale (S); toutes les arêtes de (D) seront normales à la ligne de courbure, lieu des contacts, et tangentes aux lignes de la seconde courbure en chacun des points de la ligne de première courbure. Et réciproquement : dès qu'une surface développable circonscrite à une surface quelconque aura ses arêtes normales à la courbe de contact; cette courbe sera l'une des lignes de courbure de la surface générale, et les arêtes de la développable seront tangentes à toutes les lignes de la courbure dont n'est pas la ligne lieu des contacts.

Il suit encore de là que l'arête de rebroussement de la développable (D), sera la développée de la ligne de courbure commune à (D) et à la surface générale; et la portion de l'arête rectiligne comprise par le point P et l'arête de rebroussement, sera au point P un des rayons de la ligne même de courbure.

Ce rayon et le rayon de courbure de la surface générale appartenant à la même ligne, suffiront à l'entière détermination de la courbure de cette ligne. Si l'on joint par une droite les centres extrémités de ces deux rayons, elle sera pour le point P le lieu de tous les centres de la ligne de courbure que l'on considère. En menant le rayon normal à cette droite, il sera le plus petit de tous, et le plan mené par lui et par le point P tangentiellement à la ligne de courbure, sera au même point le plan osculateur de cette courbe.

On ne considère ordinairement que les deux rayons de courbure placés sur la normale des surfaces, et on leur a donné exclusivement le nom de *rayons de la surface*. Les deux autres rayons qui sur le plan tangent appartiennent spécialement aux lignes de courbure, sont cependant intéressants à connaître relativement à la

forme de la surface; et leur considération, qui d'ailleurs peut être utile, jette beaucoup de jour sur la théorie de la courbure des surfaces. Mais nous ne nous étendrons pas actuellement sur cet objet; parce que nous y reviendrons ensuite (dans la seconde Section, Théorie), lorsque nous chercherons à déterminer sur les surfaces, leurs lignes de courbure tout entières et les surfaces développables qui en dépendent: seul travail qui nous reste à faire après avoir déterminé, pour chaque point, tous les éléments de la courbure des surfaces.

FIN DU PREMIER MÉMOIRE.

NOTES PRINCIPALES

DU PREMIER MÉMOIRE.

(Pour ne pas trop charger le texte de cet Ouvrage, nous avons cru devoir rejeter à la fin de chaque Mémoire, les notes les plus étendues, et qui peuvent faire l'objet d'une étude spéciale.)

NOTE PREMIÈRE.

De la continuité des surfaces. Forme générale qu'elles affectent, à partir de chacun de leurs points.

Lorsque nous considérons les surfaces par lesquelles nous voyons déterminées les formes des corps, au simple aspect, nous acquérons une idée très-nette de leur nature en général. Mais si nous voulons la définir rigoureusement, nous trouvons qu'il en est ici comme du commencement de toutes les théories; ce qu'il y a de plus difficile à exposer, c'est toujours les premiers principes. Ainsi dans les surfaces diverses que nous connaissons, nous voyons qu'à partir de chaque point P, fig. 30, nous pouvons cheminer sur elles suivant une infinité de directions PA, PB, PC, etc.... Mais nous ne pouvons pas *à priori* supposer que ces directions, à partir du point quelconque P, soient plutôt comme des rayons partis d'un centre sur un plan, que des arêtes parties du sommet d'un cône ou de plusieurs cônes concentriques, etc. Aussi avons-nous fait voir que le premier de ces cas ne peut avoir lieu, et par conséquent la surface avoir en P de plan tangent unique; si ce n'est en admettant qu'à partir du point P, aucune section plane de la surface ne puisse avoir plus d'une tangente. Voyons donc si cette hypothèse est généralement fondée.

Supposons d'abord qu'elle ne le soit pas, et qu'ayant tracé la courbe plane quelconque, fig. 31, $PP'P''P'''....P^v$, à chaque point de cette courbe puisse correspondre sur le même plan une autre courbe Pp, $P'p'$, $P''p''$,.... La surface (S) s'étendant

1er MÉMOIRE. déjà dans les deux dimensions PP^v et PT; si, sur le plan de la première courbe, nous menons la transversale quelconque $pp'p''p'''$,...., P^v qui vienne se terminer en un point P^v de cette courbe, chacun des points de la transversale appartiendrait à l'une des courbes Pp, P$'p'$, P$''p''$,.... : enfin nous pourrions répéter les mêmes constructions pour les autres courbes planes QQ'Q'',..., Q^v, RR'R'',..., R^v, TT'T'',..., T^v. Donc alors la grandeur graphique que nous avons appelée *surface*, présenterait dans trois dimensions une étendue *continue*, et serait un vrai solide au lieu d'être une surface.

Théorème fondamental.

Ainsi l'essence des surfaces est de ne pouvoir, étant coupées par un plan quelconque PpP^v, *offrir qu'une courbe* PP'P'',...., *à partir de chaque point. Quelques points isolés pourront en offrir un plus grand nombre, mais ces points seront toujours séparés par une infinité d'autres qui n'en présenteront qu'une :* ceux-ci sont les points où nous considérons la forme *générale* des surfaces, les autres sont des points *singuliers;* et, plus tard, nous examinerons aussi la forme qu'y affectent les surfaces.

NOTE II.

Construction des surfaces du second degré, osculatrices des surfaces quelconques.

Nous allons d'abord prouver que pour un point quelconque C, fig. 3, comme centre, pris sur la normale PT de la surface générale (S), il est toujours possible de concevoir une courbe du second degré PμE osculatrice en P à une section normale de (S). Nous ferons voir ensuite qu'il est toujours possible de construire une surface du second degré passant par trois courbes du même ordre PμE, Pμ'E, Pμ''E, dont la normale PE soit un diamètre, et par conséquent un axe commun.

La courbure de la section Pm de (S) est nécessairement comprise entre zéro et l'infini. D'un autre côté, il n'est aucune des courbures comprises entre ces limites qu'on ne puisse attribuer en son sommet P à une courbe du second degré, fig. 5. V, dont l'axe PE seulement est déterminé. Il est visible, en effet, que la courbure de la ligne du second degré est zéro ou l'infini, lorsque l'autre axe ACA devient infini ou nul; et que cet axe prenant ensuite toutes les valeurs intermédiaires imaginables entre ces deux extrêmes, la courbure de PAE en P prendra aussi toutes les valeurs possibles.

Donc premièrement on peut toujours concevoir trois lignes du second degré PμE, Pμ'E, Pμ''E, fig. 3, ayant pour centre commun le point quelconque C pris sur la

normale PΓ de (S) et chacune de ces courbes osculant respectivement une des sections normales Pm, Pm', Pm'', de cette surface.

Faisons maintenant passer une surface du second degré par ces trois lignes PμE, Pμ'E, Pμ''E. Pour cela, si nous menons d'abord, par leur centre commun, un plan perpendiculaire à l'axe PE, ce plan contiendra évidemment le second axe de chacune de ces lignes. Connaissant les trois courbes, nous connaîtrons les sommets qu'elles ont sur ce plan coupant. Soient donc μ, μ', μ'', fig. 32, un des sommets de chacune de ces courbes. Si par ces trois points nous pouvons faire passer une courbe du second degré dont C soit le centre, et si nous regardons successivement chacun des diamètres de cette courbe comme l'axe d'une ligne du second degré passant par le point P de (S), fig. 3 et 4. Nous formerons un système de lignes qui couvrira toute une surface $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$ nécessairement du second degré, et qui contenant les trois courbes PμE, Pμ'E, Pμ''E sera osculatrice en P de la surface (S).

Par m' milieu de $\mu'\mu''$ menons le diamètre Cm', puis $m\mu$ parallèle à $\mu''m'\mu'$; ensuite, par m et m', soient mo, $m'o'$ perpendiculaires à Cmm'; prenons sur elles $mn = m\mu$ et $m'n' = m'\mu'$; menons la droite nn' jusqu'en T sur Cmm', et soit θt parallèle à mn ou $m'n'$ et telle que $m\theta = m'$T, et Ct = CT : enfin tirons la droite tT; o, o' étant sur elles le prolongement de mn et $m'n'$, Co = Co'; enfin soit pris sur Cθ, Ca = Co, ce point a est précisément l'extrémité du demi-diamètre Cmm'. Si d'ailleurs on porte Co ou Ca en $\theta\gamma$, qu'on mène $\gamma\delta$, $\delta\iota$, $\iota\zeta$ respectivement parallèles à CT et θt; $\theta\zeta$ sera égal au demi-diamètre Cb conjugué à Ca ou parallèle à $m\mu$ et $m'\mu'$.

Pour se rendre raison de cette construction, il faut observer que comme Co = Co', C est le centre d'un cercle passant par o et o', et comme oo'T, nn'T concourent en T sur le diamètre CT, ce cercle et la courbe du second degré ayant C pour centre et CT pour ligne des x, ont sur elle mêmes soutangentes pour les mêmes abscisses. Ainsi l'axe des x est le même pour les deux courbes; or pour le cercle, il égale deux fois le rayon Co ou Co' = Ca. Ensuite le rapport des ordonnées mn, mo est celui du second axe de la courbe au rayon du cercle. Or $\theta\gamma : \theta\zeta :: mo : mn$. Enfin en inclinant les ordonnées mn, $m'n'$ sur $m\mu$, $m'\mu'$, le diamètre conjugué à Ca ne change que de direction et l'on a toujours Cb = $\theta\zeta$.

Cette solution suppose que la courbe $\mu\mu'\mu''$ est une ellipse. Si elle devait être une hyperbole, on rapporterait l'hyperbole passant par μ, μ', μ'' à une autre hyperbole ayant mêmes soutangentes pour les mêmes abscisses, et qui fût immédiatement constructible.

NOTE III.

De la sphère comparée aux surfaces dont les deux courbures principales sont dirigées en sens opposés.

La sphère ayant ses deux courbures dans le même sens, et tous ses points d'un même côté par rapport à chaque plan tangent, il est clair qu'en faisant varier la position de ses points parallèlement à l'un de ces plans, on ne pourra produire aucune des surfaces à courbures opposées, c'est-à-dire, qui ont une partie de leurs points au-dessus et l'autre partie au-dessous du plan tangent. C'est ce qui semble contraire à ce que nous avons affirmé, pages 27 et 28. On va voir, néanmoins, que la sphère peut encore dans ce cas nous conduire à la connaissance de ce genre de courbures, et par conséquent que nous n'avons rien avancé de trop.

Considérons donc au point P la surface (S), fig. 33, dont les deux courbures soient en sens opposés. Si nous concevons la sphère (Σ) osculée en P par la courbe PM, tracée sur la surface (S), nous pourrons faire varier généralement la forme de (S) et de (Σ), d'après les théorêmes que nous avons exposés, sans que la courbe PM cesse d'osculer la sphère (Σ). Ainsi PM étant supposé d'abord une section normale de (S) en P, les sections obliques qu'on obtiendra sur les surfaces dérivées de (S), ne cesseront pas d'osculer la sphère (Σ), comme si (S) avait ses deux courbures dans le même sens. Donc premièrement les sections obliques ont avec les sections normales les mêmes relations sur les surfaces dont les courbures sont dirigées dans le même sens ou en sens opposé.

Si, par exemple, nous supposons que la surface à courbures opposées soit un hyperboloïde du second degré à une nappe $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, fig. 33, tous les plans coupants menés par le point P tangentiellement à la section normale PM traceront des petits cercles sur la surface de la sphère, et des hyperboles sur la surface du second degré; à mesure que le plan coupant s'approchera du plan tangent les axes de la section hyperbolique diminueront, et l'hyperbole approchera de se confondre avec les deux droites génératrices de la surface qui passeront en P; mais les petits cercles de la sphère ne cesseront pas d'osculer l'hyperbole qui se trouve dans le plan de chacun d'eux. Observons en passant que le point même de contact est le cercle osculateur du sommet de l'hyperbole qui se réduit à deux lignes droites, c'est-à-dire, aux deux génératrices : la raison en est évidente.

Cherchons maintenant la mesure absolue des deux courbures d'une surface, dans

le cas où ces courbures sont en sens opposés. Il faut observer qu'alors l'indicatrice au lieu d'être une ellipse est une hyperbole. Comparons donc l'hyperbole à l'ellipse, et d'abord comparons l'hyperbole équilatère au cercle. Traçons un cercle ayant pour diamètre l'axe réel de cette hyperbole. Soit Σ le cercle et $\frac{\Sigma}{2}$ l'hyperbole, fig. 34, soit pris de côté et d'autre du sommet P les abscisses $P\varphi$ et $P\varphi'$ infiniment petites et égales entr'elles. Nous savons que le quarré des ordonnées φm et $\varphi' m'$ sera, pour le cercle, la différence des quarrés du rayon OP et de l'abscisse de $O\varphi$; et pour l'hyperbole la différence des quarrés de $O\varphi'$ et OP, c'est-à-dire, deux fois le produit de OP par $P\varphi$ pour le cercle et par $P\varphi'$ pour l'hyperbole (en négligeant les infiniment petits du second ordre). Mais $P\varphi$, $P\varphi'$ sont égaux par hypothèse, ces produits et par conséquent les quarrés de φm et de $\varphi' m'$ le sont donc aussi. Donc si nous faisons tourner le cercle Σ sur sa tangente en P, de manière à ce qu'il se rabatte dans la branche HPH de l'hyperbole, le point m s'appliquera sur le point m', et le cerle Σ sera par conséquent alors osculateur de l'hyperbole au sommet P.

Si maintenant nous faisons croître ou décroître proportionnellement les ordonnées ou les abscisses du cercle et de l'hyperbole équilatère, cette dernière courbe deviendra une hyperbole, ayant entre ses axes un rapport quelconque; le cercle deviendra une ellipse; et le point m' qu'il a de commun avec l'hyperbole sera toujours sur cette hyperbole.

De là résulte immédiatement ce théorême général. « Si l'on construit une ellipse et une hyperbole dont les quarrés des axes aient la même grandeur absolue, ces deux courbes auront même courbure à leur sommet réel. »

Ainsi le rayon de courbure de l'hyperbole est encore, au sommet de cette courbe, égal au quarré de l'axe étranger au sommet divisé par l'axe réel. C'est encore une valeur analogue à celle de l'ellipse; et le rayon de courbure en un point quelconque de l'hyperbole s'exprime en fonction du diamètre parti de ce point et de son conjugué comme dans l'ellipse. Car il suffira pour cela d'incliner à-la-fois toutes les ordonnées de l'hyperbole et de l'ellipse; les axes deviendront deux diamètres conjugués, et le rayon de courbure qui n'aura pas changé aura pour expression le quarré du diamètre qui ne passe pas par le point P donné, divisé par la distance de ce point à l'autre diamètre.

Soit donc que la surface du second degré osculatrice des surfaces générales (S) ait ses deux courbures dans le même sens ou opposées; tout ce que nous avons dit de la mesure de ces courbures sera vrai pour les deux cas.

Ier MÉMOIRE.

NOTE IV.

Algorithme des projections et des rabattements propres à la Géométrie descriptive.

Règle générale, lorsque nous envisagerons les grandeurs graphiques comme représentées par deux projections, l'une horizontale et l'autre verticale, nous les désignerons l'une par un petit *v*, l'autre par un petit *h*, placés au bas des lettres indiquant ces grandeurs graphiques; et quand nous voudrons les considérer dans l'espace et non plus en projection, nous emploierons les lettres mêmes qui les indiquent, mais sans *v* ni *h*.

Ainsi, par exemple, le point A, la ligne AB, la surface (S), seront représentés dans leur projection

horizontale par A_h, AB_h, $(S)_h$;
et verticale par A_v, AB_v, $(S)_v$.

Sur les épures mêmes dessinées pour servir à l'intelligence du texte, nous nous contenterons de placer la projection horizontale au-dessous, et la verticale au-dessus; en désignant identiquement les mêmes objets par les mêmes lettres sans *v* ni *h*; parce que leur position seule caractérise la projection à laquelle ils appartiennent. Mais lorsque quelque partie de la projection horizontale dépassera l'espace réservé à cette projection, nous l'y rapporterons par un petit *h*. Et dans le cas où ce serait au contraire quelque partie de la projection verticale qui dût anticiper sur l'espace réservé à la projection horizontale, nous la rapporterons à sa vraie projection par un petit *v*.

Enfin pour désigner le rabattement d'une courbe ABC ou d'un plan (Π) quelconques, opéré sur un des deux plans de projection, nous ferons précéder d'un petit *r* le petit *h* ou le petit *v* désignant les projections horizontales ou verticales.

Ainsi nous exprimerons le rabattement de la courbe ABC et du plan (Π) sur un plan horizontal

par ABC_{rh}, $(\Pi)_{rh}$;
et par ABC_{rv}, $(\Pi)_{rv}$,

le rabattement des mêmes grandeurs graphiques sur un plan parallèle au plan vertical de projection.

Ces détails sont minutieux, sans doute; mais ils sont utiles, mais ils tendent à faciliter l'intelligence d'une géométrie par elle-même assez difficile : il ne faut donc pas les négliger.

FIN DES NOTES DU PREMIER MÉMOIRE.

SECOND MÉMOIRE,

SPÉCIALEMENT CONSACRÉ A LA THÉORIE DES TANGENTES CONJUGUÉES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

§ Ier.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CONTACTS DES LIGNES ET DES SURFACES.

ARTICLE PREMIER.

NOTIONS FONDAMENTALES.

Avant d'exposer la théorie des tangentes conjuguées, principal objet de ce Mémoire et du suivant, nous présenterons, par l'analyse, la démonstration générale des théorêmes que nous avons fait connaître (Mémoire précédent, § III), relativement aux contacts des surfaces dont la forme éprouve certaines variations déterminées. Mais comme un tel sujet ne peut pas être entièrement élémentaire, afin de suivre une marche plus facile, nous allons démontrer directement les théorêmes dont il s'agit, d'abord

9

pour les lignes courbes, ensuite pour les surfaces; en commençant, art. II, par ce qui est relatif à la simple osculation. De cette manière, on passera plus facilement au cas général, art. III et suivant; et l'on pourra d'ailleurs se borner au cas particulier, puisque nous ne voulons pas maintenant pousser l'examen de la forme des surfaces, au-delà des éléments du second ordre et des simples osculations.

Pour cette même raison, et parce que les propriétés de la courbure des surfaces, restreinte à ses éléments du second ordre, peuvent être données complètement par la considération unique des tangentes conjuguées et de l'indicatrice, les élèves qui voudront se borner aux éléments du second ordre, pourront laisser tout le premier paragraphe de ce Mémoire, et passer de suite à la théorie des tangentes conjuguées, que nous avons cherché à rendre aussi élémentaire que sa nature pouvait le comporter.

Maintenant rappelons en peu de mots les premiers principes de l'analyse différentielle appliquée à la géométrie.

Si dans les équations de deux courbes

$$z = \varphi(x),$$
$$z = \psi(x),$$

on remplace x par $x + i$, et que z devienne alors $z + k$ pour la première, et $z + \varkappa$ pour la seconde, on sait, d'après le théorème connu de Taylor, que ces deux équations peuvent généralement être développées par les deux séries suivantes :

$$z + k = \varphi(x) + \varphi'(x)\frac{i}{1} + \varphi''(x)\frac{i^2}{1.2} + \varphi'''(x)\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$z + \varkappa = \psi(x) + \psi'(x)\frac{i}{1} + \psi''(x)\frac{i^2}{1.2} + \psi'''(x)\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

φ' et ψ' étant les coefficients différentiels du premier ordre de φ
et ψ, c'est-à-dire, tels que

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi', \quad \frac{d\psi(x)}{dx} = \psi';$$

φ'' et ψ'' étant les coefficients différentiels du second ordre de φ et ψ, c'est-à-dire, tels que

$$\frac{dd\varphi(x)}{dx^2} = \varphi'', \quad \frac{dd\psi(x)}{dx^2} = \psi'';$$

et ainsi de suite.

Maintenant si pour la valeur particulière $\bar{x}$ de x, on a simplement $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) = \bar{z}$, les deux courbes auront un point commun $\bar{x}$, $\bar{z}$.

Si de plus, les coefficients du premier ordre sont égaux, $\varphi'(\bar{x}) = \psi'(\bar{x})$, les deux courbes seront tangentes en ce point; elles y auront un contact du premier ordre.

Si de plus, les coefficients du second ordre sont égaux, $\varphi''(x) = \psi''(x)$, les deux courbes seront mutuellement osculatrices en ce point, elles y auront un contact du second ordre; et ainsi de suite.

Et généralement, si les coefficients correspondants des deux développements sont égaux jusqu'à i^m inclusivement, les deux courbes auront, au point qui leur est commun, un contact de l'ordre m.

Alors toute autre courbe $z = \chi(x)$ passant aussi par le point $\bar{x}$, $\bar{z}$, mais qui n'aurait pas les m premiers coefficients de son développement, égaux à ceux des deux autres courbes, ne pourrait point passer entr'elles à partir du point de contact de ces dernières.

Et pareillement, lorsque les équations $z=\varphi(x,y)$, $z=\psi(x,y)$ de deux surfaces, en supposant que x et y deviennent $x+i, y+h$, développées ensuite par rapport à i et h, ont leurs coefficients différentiels correspondants identiques jusqu'à ceux de la dimension m inclusivement, les deux surfaces auront entr'elles un contact de cet ordre m, au point qui leur est commun; et toute autre surface dont l'équation ainsi développée n'aurait pas ses coefficients égaux aux premiers jusqu'à l'ordre m inclusivement, ne pourrait point passer entre les deux premières surfaces, à partir du point de contact.

Revenons un moment à la considération des lignes courbes. On sait que $z=\varphi(x)$ étant l'équation d'une courbe quelconque, l'équation de la tangente est

$$Z-z=\varphi'(X-x),$$

et que

$$\varphi'(Z-z)=-(X-x)$$

est l'équation de la normale.

Or (*), deux normales infiniment voisines se rencontrent en un point, centre de courbure de la courbe pour le petit élément compris entre ces deux normales : le point X, Z de la normale, qui ne changera pas lorsque x, z deviendront $x+dx$, $z+dz$, sera donc le centre de courbure de l'élément dx, dz.

Mais

$$\varphi'(Z-z)=-(X-x)$$

(*) Si nous n'écrivions que pour des Géomètres, nous aurions pu dégager cette dernière partie de toute considération infinitésimale ; mais en le faisant d'après les belles méthodes de l'auteur des Fonctions Analytiques, nous aurions été moins faciles ; et c'est surtout ce que nous voudrions pouvoir être le plus possible, afin de généraliser l'étude des théories vraiment utiles à des Ingénieurs.



étant l'équation de la normale, si on la différentie par rapport à x, z et φ', sans que X ni Z varient, on aura, puisque $dz = \varphi' dx$,

$$\varphi''(Z - z) + \varphi'^2 = -1;$$

d'où

$$Z - z = -\frac{1 + \varphi'^2}{\varphi''},$$

et

$$X - x = \varphi' . \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi''}.$$

Donc la distance du centre de courbure Y, Z, au point x, z de la courbe; c'est-à-dire, le rayon de courbure a pour expression

$$\sqrt{(X - x)^2 + (Z - z)^2} = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''}.$$

La grandeur du rayon de courbure ne dépendant que des éléments du premier et du second ordre φ' et φ'', on voit que deux surfaces ont en un point donné même rayon de courbure, dès qu'elles ont en ce point un contact du second ordre.

Réciproquement, si elles ont même tangente et même rayon de courbure en un point quelconque, elles ont un contact du second ordre en ce point, et les coefficients différentiels du premier et du second ordre de leurs équations, sont égaux.

ARTICLE II.

De la simple osculation des lignes courbes dont la forme éprouve certaines transformations.

Soient deux courbes APC et Pm qui se croisent en P, *mais ne s'y touchent pas*, et une troisième courbe Pm' qui passe aussi par le point P, sans y être tangente à APC; soit ensuite la corde quelconque AC parallèle à PT, tangente de la primitive APC

IIme MÉMOIRE. en P ; enfin, portons sur cette corde les longueurs AA′, CC′ égales à mm', en plaçant successivement la corde AC à toutes les distances possibles de PT ; on formera une nouvelle courbe A′PC′ qui sera dans une relation nécessaire avec les deux autres : c'est cette relation que nous voulons déterminer ; et nous ferons voir qu'elle entraîne l'osculation des deux lignes primitive et dérivée APC, A′PC′.

Soient

$$\left.\begin{array}{l} x = f(y) \\ X = F(y) \\ \xi = \varphi(y) \\ \Xi = \Phi(y) \end{array}\right\} \text{les équations des courbes} \left\{\begin{array}{l} APC \\ A'PC' \\ Pm \\ Pm' \end{array}\right.$$

En supposant les y perpendiculaires, et les x parallèles à la tangente PT ; il est évident que dans ces quatre courbes, y sera le même pour tous les points d'une même corde AA′CC′. Observons d'ailleurs que nous avons, par hypothèse,

$$AA' = mm';$$

c'est-à-dire,

$$x - X = \xi - \Xi :$$

donc aussi

$$f(y) - F(y) = \varphi(y) - \Phi(y),$$

équation que, pour abréger, nous mettrons sous la forme

$$f - F = \varphi - \Phi,$$

et qui, différentiée deux fois, nous donnera

$$f' - F' = \varphi' - \Phi',$$
$$f'' - F'' = \varphi'' - \Phi''.$$

Considérons d'abord l'équation du premier ordre.

Nous pouvons, dans cette équation, regarder f', F', φ', Φ' comme des constantes arbitraires $\bar{f}'$, $\bar{F}'$, $\bar{\varphi}'$, $\bar{\Phi}'$; alors, au lieu

d'appartenir aux quatre courbes APC, A'PC', Pm, Pm', elle appartiendra seulement aux quatre tangentes $A\Theta$, $A'\Theta$ (*), mt, $m't$ de ces courbes, parties de la même corde $AA'mm'$. Les équations finies de ces tangentes seront alors

$$x = y.\overline{f}' + c,$$

$$X = y.\overline{F}' + C,$$

$$\xi = y.\overline{\varphi}' + \gamma,$$

$$\Xi = y.\overline{\Phi}' + \Gamma,$$

c, C, γ, Γ étant les constantes qui complètent ces équations intégrales. Si dans ces quatre équations nous retranchons, membre à membre, la seconde de la première, la quatrième de la troisième, et la seconde différence de la première différence, nous aurons

$$x - X - (\xi - \Xi) = y[\overline{f}' - \overline{F}' - (\overline{\varphi}' - \overline{\Phi}')] + c - C - (\gamma - \Gamma).$$

Mais chaque tangente ayant un point de commun avec la courbe qu'elle touche, on a pour ces points de contact, comme nous venons de le voir,

$$x - X = \xi - \Xi,$$

$$\overline{f}' - \overline{F}' = \overline{\varphi}' - \overline{\Phi}';$$

donc aussi

$$c - C = \gamma - \Gamma.$$

Donc, enfin, pour une corde quelconque $AA'mm'$ qui coupera les quatre tangentes parallèlement à l'axe des x, on aura toujours

$$\overline{x} - \overline{X} = \overline{\xi} - \overline{\Xi},$$

(*) Ou bien aux quatre tangentes $C\theta$, $C'\theta$, mt, $m't$; mais il suffit de considérer les quatre premières.

ces abscisses étant celles des quatre tangentes, fournies par une seule et même ordonnée $\bar{y}$.

Ainsi, AΘ, A′Θ, *mt*, *m′t* étant les quatre tangentes que nous considérons; non-seulement sur la corde AA′*mm′*, lieu des points de contact A, A′, *m*, *m′*, la partie AA′ est égale à *mm′*; mais toute autre corde parallèle à celle-là, est pareillement divisée en parties égales par les mêmes tangentes.

D'après cela, il est visible que la droite qui passera par le point de concours *t* des deux tangentes *mt*, *m′t*, passera également par le point de concours Θ des deux tangentes AΘ, A′Θ; car sans cette condition, les parties interceptées ne seraient plus égales entr'elles. Ce théorême peut être rendu d'un grand usage dans la théorie des courbes et des surfaces du second degré.

Passons maintenant aux contacts du second ordre.

Soit $\bar{y}$ la valeur de l'ordonnée courante y au point P, où la tangente APC, A′PC′ est parallèle à l'axe des x. Cette condition exigera que $f'(\bar{y})$ soit infini, c'est-à-dire, que f' soit de la forme

$$f'(y) = \frac{\psi}{(y-\bar{y})^{\mu}} + \chi,$$

ψ ne pouvant devenir nul, ni χ infini pour la valeur particulière $y=\bar{y}$.

Cherchons maintenant la valeur du rayon de courbure de APC en P, où $y-\bar{y}=0$; son expression générale est, comme nous l'avons fait voir dans l'article précédent,

$$\rho = \frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}.$$

Mais si

$$f' = \frac{\psi}{(y-\bar{y})^{\mu}} + \chi;$$

on a aussi

$$f'' = \frac{\psi'}{(y-\bar{y})^{\mu}} - \mu \cdot \frac{\psi}{(y-\bar{y})^{\mu+1}} + \chi'.$$

Donc le rayon devient

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{\psi}{(y-\bar{y})^{\mu}}+\chi\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\psi'}{(y-\bar{y})^{\mu}}-\mu\frac{\psi}{(y-\bar{y})^{\mu+1}}+\chi'}$$

En chassant les dénominateurs partiels en $y-\bar{y}$, et supprimant dans les deux termes de cette fraction les plus grandes puissances de $y-\bar{y}$, il vient

$$\rho = -\frac{\psi^2}{\mu(y-\bar{y})^{2\mu-1}}.$$

Maintenant, si le rayon de courbure ne doit être ni nul ni infini, ce qui est le cas général, il faudra qu'on ait $2\mu-1=0$, $\mu=\frac{1}{2}$; et le rayon de courbure sera par conséquent,

$$\rho = -\tfrac{1}{2}\psi^2,$$

expression d'une simplicité singuliere, et qui donne le moyen d'obtenir immédiatement ce rayon dans un cas où les formules ordinaires se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (*).

(*) Pour rendre sensible ce moyen d'opérer, nous allons en offrir un exemple facile. Cherchons la valeur des rayons de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole, qui correspondent aux sommets de ces courbes dont l'équation générale est, en la rapportant aux deux axes,

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{\pm(y^2-b^2)},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{\sqrt{y+b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pm(y-b)}},$$

équation qui, lorsque $y=b$, $x=0$, devient $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{0}$, et rentre dans le cas que nous considérons.

Faisons donc $y=b$, on a

$$\psi=\frac{a}{b}\frac{y}{\sqrt{y+b}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{\sqrt{2b}};\ \text{donc}\ 2\psi^2=\mp\frac{a^2}{b}.$$

C'est la valeur absolue du rayon de courbure appartenant aux sommets placés

 Voyons à présent quelle est la valeur du rayon de courbure de la seconde courbe A'PC' (fig. 1, comme dans tout ce qui précède). Puisque

$$f' - F' = \varphi' - \Phi', \quad \text{on a} \quad F' = f' + \Phi' - \varphi'.$$

Or,

$$f' = \frac{\psi}{(y - \bar{y})^{\mu}} + \chi; \quad \text{donc} \quad F' = \frac{\psi}{(y - \bar{y})^{\mu}} + \chi + \Phi' - \varphi'.$$

Mais si les deux courbes Pm et Pm' ne sont ni l'une ni l'autre tangentes à APC, ni à A'PC' (et telle est notre hypothèse), F' et f', non plus que χ, ne pourront pas devenir infinies : donc le rayon de courbure de A'PC' sera encore en P,

$$(2) \qquad \rho' = -\tfrac{1}{2}\psi^{2}.$$

Donc les deux courbes APC, A'PC' ont en P le même rayon de courbure (1), (2), $-\frac{1}{2}\psi^{2}$, et sont mutuellement osculatrices en ce point : c'est ce que nous voulions démontrer.

Autrement et plus simplement. Puisque la valeur générale du rayon de courbure de la courbe $x = f(y)$ ou $y = \omega(x)$, est $\rho = \frac{(1 + \omega'^{2})^{\frac{3}{2}}}{\omega''}$; dans le cas particulier où $\omega' = 0$, $\rho = \frac{1}{\omega''}$. Or, au point P, la tangente commune à APC, A'PC' étant parallèle à l'axe des x, ω' est égal à zéro pour les deux courbes. Cherchons donc la valeur $\frac{1}{\omega''}$ que prend alors leur rayon de courbure.

Soit $\bar{x}$ la valeur de x au point P ($\bar{y}$ étant la valeur correspon-

---

sur l'axe des y. C'est aussi le résultat auquel nous étions parvenus dans le Mémoire précédent, mais par des considérations purement géométriques. Dans une série d'expériences sur la flexion des bois, entreprise dans l'arsenal de la Marine, à Corcyre, nous avons fait usage de cette méthode pour déterminer la grandeur du rayon de courbure des pièces de bois soumises à la flexion, au point où cette courbure est un *maximum*.

dante de y), il faudra que $\omega'(x)$ devienne $\omega'(\bar{x})=0$, en supposant que $y=\omega(x)$ soit l'équation de APC; par conséquent dy sera de la forme

$$(x-\bar{x})\,\omega'.(x):$$

donc y même est de la forme $(x-\bar{x})^2\omega(x)+$ const. Mais au point P de la courbe ABC donnée par cette fonction, $y=\bar{y}$, $x=\bar{x}$: donc enfin la véritable équation de APC est

$$y-\bar{y}=(x-\bar{x})^2\omega(x).$$

Donc au point P le rayon de courbure $\rho=\frac{1}{2\omega(x)}$.

Si maintenant nous voulons obtenir la valeur du rayon de A'PC' en ce point P, soit $m(y-\bar{y})$ la valeur des distances des points de A'PC' aux points de APC, ayant la même ordonnée y; X étant l'abscisse de A'PC', on aura $x=X-m(y-\bar{y})$, et par conséquent

$$x-\bar{x}=X-\bar{x}-m(y-\bar{y})$$

valeur qui, substituée dans l'équation de APC, donne

$$y-\bar{y}=[X-\bar{x}-m(y-\bar{y})]^2\omega[X-m(y-\bar{y})].$$

Équation qui, lorsqu'on y fait $y=\bar{y}$ donne $X=x=\bar{x}$, et par conséquent

$$\frac{dy}{dX}=0,\qquad \frac{d^2y}{dX^2}=2\omega(x).$$

Donc le rayon de courbure de A'PC' en P est aussi $\frac{1}{2\omega(x)}$. Ainsi, *les deux courbes* APC, A'PC' ont en P un contact du second ordre. (Voyez la note I.)

Démontrons actuellement que le même théorême est immédiatement applicable aux surfaces.

IIme MÉMOIRE.

SUITE DE L'ARTICLE II.

De la simple osculation des surfaces dont la forme éprouve certaines transformations.

Si le plan tangent à la surface primitive en $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ est parallèle au plan des x, y, on aura pour ce point $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$; donc partout $\frac{dz}{dx}$ est divisible par $x-\bar{x}$, et $\frac{dz}{dy}$ par $y-\bar{y}$; donc aussi

$$z-\bar{z}=(x-\bar{x})^2\varphi+(x-\bar{x})(y-\bar{y})\psi+(y-\bar{y})^2\chi$$

φ, ψ, χ étant des fonctions de x et de y, qui ne puissent devenir infinies lorsque $x-\bar{x}=0$, $y-\bar{y}=0$.

Par le point $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, menons le plan $y-\bar{y}=a(x-\bar{x})$ qui sera nécessairement normal à la surface, nous aurons

$$z-\bar{z}=(x-\bar{x})^2(\varphi+a\psi+a^2\chi)$$

pour la projection sur le plan des x, z, de la courbe tracée sur la surface par son plan normal; et pour équation de cette courbe même, rabattue sur le plan des x, z,

$$z-\bar{z}=(x-\bar{x})^2(\varphi+a\psi+a^2\chi)\sqrt{(1+a^2)}=(x-\bar{x})^2.\omega.$$

En faisant

$$\omega(x)=(\varphi+a\psi+a^2\chi)\sqrt{(1+a^2)};$$

donc, d'après ce que nous venons de démontrer, $\frac{1}{2\omega}$ sera le rayon de courbure de cette courbe pour le point $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

Considérons maintenant la surface formée en transportant chaque point x, y, z à une distance proportionnelle à $z-\bar{z}$, et suivant une

direction $my = nx$ parallèle au plan des x, y. Tous les points de l'axe des z, ainsi transportés, formeront encore une ligne droite dont nous représenterons les équations par

$$x - \overline{x} = m(z - \overline{z}), \quad y - \overline{y} = n(z - \overline{z}).$$

Donc X, Y, $Z = z$ étant les coordonnées de la nouvelle surface, on aura

$$x - \overline{x} = X - \overline{x} - m(z - \overline{z}), \quad y - \overline{y} = Y - \overline{y} - n(z - \overline{z}),$$

et par conséquent pour la courbe tracée sur cette surface par le plan normal,

$$z - \overline{z} = [X - \overline{x} - m(z - \overline{z})]^2 . \omega,$$

mais déjà

$$z - \overline{z} = (x - \overline{x})^2 . \omega$$

est, comme nous venons de le voir, l'équation de la première courbe; et nous avons prouvé dans la dernière méthode de l'article précédent, que deux lignes représentées par deux équations d'une telle forme, ont l'une et l'autre $\frac{1}{2\omega}$ pour rayon de courbure au point qui leur est commun.

Donc, tout plan mené par $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, normalement aux deux surfaces primitive et dérivée, trace sur elles deux courbes tangentes, et qui ont même rayon de courbure en ce point de contact : donc aussi, les deux surfaces sont en ce point mutuellement osculatrices.

ARTICLE III.

De la transformation qu'on peut faire subir aux surfaces, sans qu'elles cessent d'avoir entr'elles un contact de l'ordre général m.

Si l'on prend un point $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sur une surface quelconque; qu'on conçoive ensuite le plan tangent à la surface en ce point,

IIme MÉMOIRE. et qu'on y rapporte chaque point de la surface par des ordonnées rectilignes ou non, lorsqu'on fera varier ces ordonnées de la manière la plus arbitraire, en supposant, cependant, que leur origine sur le plan tangent soit invariable, et que le point d'application sur la surface reste toujours à la même distance du plan tangent;

I°. Aucune des nouvelles ordonnées ne formant un angle nul avec le plan tangent (à partir du point $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ que l'on considère), la nouvelle surface sera osculatrice de la primitive en ce point $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

II°. Si de plus les nouvelles ordonnées sont respectivement tangentes aux ordonnées primitives (à leur commune origine sur le plan tangent), la nouvelle surface aura toujours, avec la surface primitive, un contact du troisième ordre.

III°. Si les nouvelles ordonnées n'ont pas seulement un contact du premier ordre, ou une simple tangence avec les ordonnées primitives correspondantes, mais un contact du second ordre, la nouvelle surface aura, avec la surface primitive, un contact du quatrième ordre.

Et en général, le contact de la surface dérivée, avec la surface primitive, est d'un ordre de *deux* unités supérieur à celui des ordonnées correspondantes de ces surfaces.

En effet, soit $z = \varphi(x, y)$, l'équation de la surface donnée: en supposant que x, y, z deviennent $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, cette équation deviendra

$$(S)\ldots\quad z+dz=\varphi+pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)$$
$$+\frac{1}{1.2.3}(\alpha dx^3+3\mathfrak{E}dx^2dy+\text{etc.})+\text{etc.}$$

Actuellement, pour passer de cette surface à sa dérivée, concevons que dx et dy deviennent respectivement

$$dX = dx + \xi,\quad dY = dy + v,$$

ξ et v étant des fonctions quelconques de dx et dy.

L'équation du plan tangent à la surface (S) étant

$$z-\bar{z}=p(x-\bar{x})+q(y-\bar{y}),$$

celle d'un plan parallèle à celui-là, mais passant par le point $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}-h$ sera

$$(\pi)\ldots\ z-\bar{z}+h=p(x-\bar{x})+q(y-\bar{y}).$$

Or, pour tous les points où ce plan coupera la surface (S) [en faisant h infiniment petit], nous aurons évidemment

$$x-\bar{x}=dx,\quad y-\bar{y}=dy,\quad z-\bar{z}=dz.$$

Retranchant donc membre à membre l'équation (π) de l'équation (S), il viendra

$$h=\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\frac{1}{1.2.3}(\alpha dx^3+3\mathfrak{C}dx^2dy+\text{etc.})+\text{etc.}$$

Telle est l'équation de la section plane faite sur la surface par un plan (π) parallèle au plan tangent, et à la distance h mesurée sur l'ordonnée z. J'observe ici que dx et dy étant supposés infiniment petits du premier ordre, h est nécessairement du second ordre, ou plus petit encore.

Maintenant si les ordonnées auxquelles nous concevons la surface (S) et sa dérivée (Σ) rapportées sur le plan tangent, ne sont pas tangentes à ce plan (et telle est toujours notre hypothèse), la distance d'un point de (S) au point correspondant de (Σ), ne peut, à partir du point de contact $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, être dans un rapport infini avec la distance h; donc cette distance est une fonction où il n'entre que des puissances positives de h.

Soit donc pour le point X, Y, Z qui sur la surface (Σ) correspond au point $\bar{x}+dx, \bar{y}+dy, \bar{z}+dz$,

$$X = \bar{x} + dx + \xi,$$
$$Y = \bar{y} + dy + \upsilon,$$

d'où

$$X - \bar{x} - dx = \xi,$$
$$Y - \bar{y} - dy = \upsilon,$$

ξ et υ étant deux fonctions quelconques de dx, dy et h. Comme les points correspondants de (S) et de (Σ) sont, par hypothèse, à la même distance du plan tangent,

$$z - \bar{z} = p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y});$$

ce plan transporté parallèlement à lui-même, peut passer à la fois par ces deux points : on a donc pour cette condition,

$$Z - \bar{z} - dz = p(X - \bar{x} - dx) + q(Y - \bar{y} - dy);$$

donc aussi,

$$Z - \bar{z} - dz = p\xi + q\upsilon.$$

Ainsi, telles seront les coordonnées des deux points correspondants

$$\text{Sur (S)} \left\{ \begin{matrix} \bar{x} + dx \\ \bar{y} + dy \\ \bar{z} + dz \end{matrix} \right\} \quad \text{sur } (\Sigma) \left\{ \begin{matrix} \bar{x} + dx + \xi \\ \bar{y} + dy + \upsilon \\ \bar{z} + dz + p\xi + q\upsilon. \end{matrix} \right.$$

Par conséquent la distance de ces deux points aura pour expression $\sqrt{[\xi^2 + \upsilon^2 + (p\xi + q\upsilon)^2]}$.

Maintenant, pour que cette distance ne devienne pas infiniment plus grande que h, il faudra que le rapport $\frac{h}{\sqrt{[\xi^2 + \upsilon^2 + (p\xi + q\upsilon)^2]}}$ ne puisse pas devenir nul, pour des valeurs de h, ξ et υ aussi petites qu'on voudra.

Supposons d'abord que ce rapport doive être constamment une

quantité finie $\frac{1}{\mu}$, on aura

$$\mu^2 h^2 = \xi^2 + \upsilon^2 + (p\xi + q\upsilon)^2,$$

équation qui, lorsque h sera infiniment petit d'un ordre quelconque, exigera que ξ et υ soient infiniment petits du même ordre.

Mais si les nouvelles ordonnées z devaient être à leur pied tangentes aux primitives, il faudrait que μ pût devenir infiniment petit du premier ordre, par conséquent ξ et υ seraient infiniment petits d'un ordre immédiatement inférieur à celui de h, et ainsi de-suite.

Nous allons actuellement reprendre l'équation générale

$$h = \frac{1}{1.2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) + \frac{1}{1.2.3}(\alpha dx^3 + 3\mathfrak{C}dx^2dy + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

en y mettant $dX - \xi$ pour dx, et $dY - \upsilon$ pour dy (quantités respectivement égales), cette équation devient

$$h = \frac{1}{1.2}[r(dX - \xi)^2 + 2s(dX - \xi)(dY - \upsilon) + t(dY - \upsilon)^2]$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(\text{etc.}) + \text{etc.}$$

Soit d'ailleurs

$$h = \frac{1}{1.2}(RdX^2 + 2SdXdY + TdY^2)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(AdX^3 + 3BdX^2dY + \text{etc.}) + \text{etc.};$$

l'équation où R, S et T, A, B, C et D, etc. sont les coefficients différentiels partiels du second ordre, du troisième, etc., appartenant à la surface dérivée (Σ) : cette équation et la précédente devront être identiques.

Lorsque les ordonnées correspondantes de (S) et (Σ) ont à leur pied un contact de l'ordre $m - 2$, μ devient infiniment petit de cet ordre. Mais h est infiniment petit du second ordre, lorsque dx et dy, dX et dY le sont du premier; donc alors, pour que l'équation

$$\mu^2 h^2 = \xi^2 + v^2 + (p\xi + qv)^2;$$

soit homogène, il faut que ξ et v soient infiniment petits de l'ordre m : donc, dans l'expression

$$h = \frac{1}{1.2}\left[r(dX - \xi)^2 + \text{etc.}\ldots\right] + \text{etc.}\ldots,$$

les termes de l'ordre le moins petit, dans lesquels entrent ξ et v, étant de la forme ξdX, vdX, ξdY, vdY, ces termes seront des infiniment petits de l'ordre $m+1$: donc ξ et v ne pourront pas entrer dans les termes qui contiennent des infiniment petits depuis le premier ordre jusqu'au $m^{ième}$ inclusivement.

Mais puisque les deux valeurs de h

$$h = \frac{1}{1.2}\left[r(dX - \xi)^2 + 2s(dX - \xi)(dY - v) + t(dY - v)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[\alpha(dX - \xi)^3 + 3\beta(dX - \xi)^2(dY - v) + \text{etc.}\right] + \text{etc.},$$
$$h = \frac{1}{1.2}\left(RdX^2 + 2SdXdY + TdY^2\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(AdX^3 + 3BdX^2dY + \text{etc.}\right) + \text{etc.},$$

doivent être *identiques*, il faudra que les infiniment petits du même ordre soient *identiques* dans les deux valeurs; car, sans cela, la différence de deux infiniment petits d'un ordre n quelconque étant toujours plus grande que la différence ou la somme d'infiniment petits des ordres $n+1$, $n+2$, ..., ces deux différences ne pourraient plus se détruire, en retranchant l'une de l'autre les deux valeurs de h.

On aura donc séparément.

$$(r - R)dX^2 + 2(s - S)dXdY + (t - T)dY^2 = 0,$$
$$(\alpha - A)dX^3 + 3(\beta - B)dX^2dY + 3(\gamma - C)(dXdY^2 + (\delta - D)dY^3 = 0,$$
$$\text{etc.}\ldots \text{ jusqu'à}$$
$$(\mu - M)dX^m + m(\nu - N)dX^{m-1}dY + \text{etc.}\ldots = 0.$$

Mais dX et dY sont entièrement indépendantes l'une de l'autre; il faudra donc qu'on ait séparément

$$r - R = 0,\quad s - S = 0,\quad t - T = 0,$$
$$\alpha - A = 0,\quad \beta - B = 0,\quad \gamma - C = 0,\quad \delta - D = 0,$$

et ainsi de suite, jusqu'à l'ordre m

$$\mu - M = 0,\quad \nu - N = 0,\ \text{etc.}$$

Or, par le principe fondamental de la théorie des contacts des surfaces, on sait que quand les coefficients différentiels des équations de deux surfaces (ces équations résolues par rapport à la même ordonnée), quand, dis-je, ces coefficients différentiels sont les mêmes jusqu'à l'ordre m inclusivement, les deux surfaces ont entr'elles un contact de cet ordre m; c'est-à-dire, que toute autre surface qui n'aurait pas avec l'une des deux premières un contact de ce même ordre m ou supérieur, ne pourrait pas, à partir du point d'attouchement, passer entre celle-là et l'autre surface. Nous pouvons donc conclure que le théorême énoncé au commencement de cet article, est vrai dans toute sa généralité.

ARTICLE IV.

Osculation des courbes tracées sur des surfaces qui sont en contact suivant une ligne quelconque.

Nous allons démontrer généralement ce premier théorême. « Si deux surfaces (S) et (Σ) ont en commun toute une ligne courbe suivant laquelle elles ont un contact de l'ordre m, les deux sections faites dans l'une et dans l'autre surface, par un plan tangent à cette courbe, auront entr'elles un contact de l'ordre $m+1$, au point qu'elles ont en commun sur la première courbe. »

Soient, en effet, les équations de ces deux surfaces

$$(S)\ldots\ z = \varphi(x, y),$$
$$(\Sigma)\ldots\ z = \psi(x, y).$$

Leur développement donnera

$$[S]\ldots z+dz=\varphi+pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\text{etc.}$$
$$[\Sigma]\ldots z+dz=\psi+p'dx+q'dy+\frac{1}{1.2}(r'dx^2+2s'dxdy+t'dy^2)+\text{etc.};$$

Les deux surfaces ayant évidemment en commun la courbe de leur contact, nous aurons les équations de cette courbe, en disant simplement que (S) et (Σ), ou [S] et [Σ] existent simultanément.

Si nous retranchons [Σ] de [S], z et dz disparaîtront, et nous aurons pour la projection horizontale de la courbe de contact, l'équation

$$(c)\ldots 0=+(pdx+qdy)+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\text{etc.}$$
$$-(p'dx+q'dy)-\frac{1}{1.2}(r'dx^2+2s'dxdy+t'dy^2)-\text{etc.}$$

Or, les deux surfaces ayant dans toute l'étendue de cette courbe un contact de l'ordre m, les coefficients différentiels correspondants de [S] et [Σ] sont égaux jusqu'aux termes de l'ordre m, dx^m, $dx^{m-1}dy$, etc....; par conséquent tous les termes inférieurs à la dimension $m+1$, se détruiront mutuellement dans l'équation (c).

Les termes de la plus haute dimension qui s'entre-détruiront seront donc de la forme

$$(M-M')\,dx^m+m(N-N')\,dx^{m-1}dy+\text{etc.}\ldots=0.$$

J'observe maintenant que si, du point x, y, z pour lequel on a cette équation de condition, nous passons au point infiniment voisin, toujours sur la courbe de contact $dy=kdx$, la même équation de condition ne cessera pas d'avoir lieu; mais alors M, N...,

M', N'... deviennent M+dM, N+dN,..., M'+dM', N'+dN',... :
donc il faudra qu'on ait généralement

$$d[(M-M')\,dx^m+m\,(N-N')\,dx^{m-1}dy+\text{etc.}]=0,$$

équation qui, développée, se présentera sous la forme

$$(P-P')\,dx^{m+1}+(m+1)\,(Q-Q')\,dx^m dy+\text{etc.}+(V-V')\,dy^{m+1}=0.$$

Or, cette dernière équation n'est autre chose que la différence des deux termes de [S] et [Σ], contenant les dx et dy, à la dimension $m+1$: nous supposons toujours $dy=kdx$.

Actuellement coupons les deux surfaces par un plan $dz=Adx+Bdy$; nous aurons pour projection horizontale des deux sections,

$$Adx+Bdy=pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)$$
$$+\ldots+Mdx^m+\text{etc.},$$

$$Adx+Bdy=p'dx+q'dy+\frac{1}{1.2}(r'dx^2+2s'dxdy+t'dy^2)$$
$$+\ldots+M'dx+\text{etc.}$$

Ces deux courbes ayant leurs coefficients différentiels correspondants égaux jusqu'à l'ordre m inclusivement, ont évidemment entr'elles un contact de ce même ordre m.

Si de plus nous supposons que le plan coupant $dz=Adx+Bdy$ soit tangent à la courbe de contact, représentée par $dy=kdx$, il suffira de dire que les trois équations

$$dz=Adx+Bdy,$$
$$dz=pdx+qdy,$$
$$dy=kdx$$

ont lieu simultanément.

Et alors, non-seulement les termes de l'ordre m seront respectivement égaux dans les deux équations ci-dessus, mais aussi la somme de tous ceux de l'ordre $m+1$; puisque l'hypothèse

 $dy = kdx$ nécessite l'équation

$$(P-P')dx^{m+1}+(m+1)(Q-Q')dx^{m}dy+\ldots+(V-V')dy^{m+1}=0.$$

Donc les deux courbes tracées sur (S) et (Σ) par un plan coupant, tangent à la ligne de contact de ces surfaces, ont entr'elles un contact d'un ordre immédiatement supérieur à celui même des deux surfaces.

En suivant toujours cette marche, nous ferions voir avec une égale facilité, que si *nous coupions les surfaces* (S) *et* (Σ) *par un plan osculateur de leur courbe de contact, les deux sections auraient entr'elles un contact de deux unités, supérieur à celui du contact des surfaces.*

Et généralement que *si deux surfaces* (S) *et* (Σ) *ont, suivant toute l'étendue d'une courbe, un contact de l'ordre* m, *lorsqu'on les coupera par une troisième surface* ($\int$), *ayant avec cette courbe un contact de l'ordre* n *en un point, les deux sections auront entr'elles, au même point, un contact de l'ordre* m + n.

ARTICLE V.

Rapports généraux des sections normales aux sections obliques faites dans les surfaces.

La méthode que nous avons suivie jusqu'ici, va nous offrir le moyen le plus simple, peut-être, qu'il soit possible de trouver, pour déterminer les rayons de courbure des sections obliques ou normales faites dans les surfaces, et les rapports qu'ont entr'eux ces divers rayons.

Reprenons, pour cela, le développement complet de l'équation d'une surface quelconque

$$[S]\ldots\ dz=pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\ldots.$$

Supposons, ce qui est toujours permis, que $p = 0$ et $q = 0$, c'est-à-dire, que le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

au point x, y, z, que nous allons considérer, soit parallèle au plan des x, y; nous aurons simplement

$$[S] \ldots . \quad dz = \frac{1}{1.2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) + \ldots .$$

Maintenant, soit $dy = \psi' dx$ l'équation d'un plan vertical quelconque, mené par le point x, y, z. En mettant dans [S], $\psi' dx$ au lieu de dy, nous aurons en dz et dx une équation qui appartiendra à la section normale faite par le plan $dy = \psi' dx$, ou plutôt à sa projection sur le plan des x et z : cette nouvelle équation sera

$$(c') \ldots . dz = \frac{1}{1.2}(r + 2s\psi' + t\psi'^2)\, dx^2 + \text{etc.} \ldots ,$$

dans laquelle il est évident que le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ est nul, et que celui du second est $r + 2s\psi' + t\psi'^2$; donc, d'après ce que nous avons démontré dans l'article II de ce Mémoire, le rayon de courbure de cette projection est, au point x, y, z,

$$\rho' = \frac{1}{r + 2s\psi' + t\psi'^2}.$$

Pour avoir l'équation de la courbe elle-même, rabattue sur le plan des x et z, en la faisant tourner parallèlement à l'axe des z, les z ne changeront pas, et les nouvelles X seront les droites mêmes dont les anciennes sont la projection.

Reprenons donc l'équation $dy = \psi' dx$ du plan vertical qui contient ces droites X; le rapport de chaque horizontale X avec sa projection sera évidemment donné par ces égalités

$$\frac{dX^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = 1 + \psi'^2;$$

IIme MÉMOIRE. donc
$$dx^2 = \frac{dX^2}{1+\psi'^2}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (c') de la projection de la courbe, il vient pour équation de cette courbe même,

$$(c)\ldots\ldots dz = \frac{1}{1.2}(r + 2s\psi' + t\psi'^2)\frac{dX^2}{1+\psi'^2} + \text{etc.}\ldots$$

Donc ρ étant le rayon de cette courbe au point que l'on considère,

$$\rho = \frac{1+\psi'^2}{r+2s\psi'+t\psi'^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \rho'(1+\psi'^2),$$

résultat qui peut être ainsi traduit en langage trigonométrique :

« Au point où la normale d'une courbe quelconque est parallèle au plan de projection, le rayon de cette courbe est égal à celui de sa projection, divisé par le quarré du cosinus de l'inclinaison du plan de la courbe sur le plan de projection. »

Nous obtiendrons avec une égale facilité, pour cette courbe, le rayon ρ'' de la projection (c''), faite sur le plan des y, z.

Pour cela, dans l'équation [S] nous mettrons pour dx sa valeur $\frac{1}{\psi'}dy$, et nous aurons

$$(c'')\ldots\ldots dz = \frac{1}{1.2}(r + 2s\psi' + t\psi'^2)\frac{dy^2}{\psi'^2} + \text{etc.}\ldots;$$

donc $\rho'' = \frac{\psi'^2}{r+2s\psi'+t\psi'^2}$; mais $\rho' = \frac{1}{r+2s\psi'+t\psi'^2}$:

donc aussi $\rho' + \rho'' = \frac{1+\psi'^2}{r+2s\psi'+t\psi'^2}$;

or cette valeur est précisément celle de ρ.

Donc enfin, on a généralement l'équation

$$\rho = \rho' + \rho'',$$

c'est-à-dire que *le rayon d'une courbe quelconque est égal à la simple somme des rayons des deux projections de cette courbe sur deux plans parallèles à ce rayon, et d'ailleurs à angle droit.*

On pourra donc faire tourner ces deux plans orthogonaux, autour d'un axe parallèle à la normale au point que l'on considère ; et, « dans l'infinité de positions que ces deux plans prendront, la somme des rayons des deux projections ne cessera pas d'être la même, et égale au rayon de la courbe projetée. » II

Passons maintenant à la détermination des rayons osculateurs des sections obliques, en fonction des rayons des sections normales.

Le plan tangent au point x, y, z, que l'on considère sur la surface (S), étant toujours pris pour le plan des x, y ; nous pouvons, de plus, supposer que la tangente à la section oblique ou normale, est un des axes, celui des y, par exemple ; puisque cet axe peut être pris à volonté. Alors l'équation de la section normale, dont le plan devient celui des y, z, est donnée par cette condition

$$dx = 0.$$

Le développement [S] se réduit donc à

$$(c) \ldots\ldots dz = \frac{1}{1.2} tdy^2 + \frac{1}{1.2.3} \text{etc.} \ldots ;$$

donc le rayon de cette section normale est, au point placé sur l'axe des x,

$$\rho = \frac{1}{t}.$$

Soit maintenant $dz = \theta dx$ l'équation du plan de la section oblique qui passe par l'axe des y, et qui par conséquent est tangente à la section normale.

Si nous rabattons la section oblique sur le plan des x, z, autour de l'axe des x, la nouvelle Z sera égale à la première $\times \sqrt{(1+\theta^2)}$; donc on aura $z = \frac{Z}{\sqrt{(1+\theta^2)}}$, et l'équation ($c$) de la section normale deviendra celle (c') de la section oblique

$$(c') \ldots\ldots \frac{Z}{\sqrt{(1+\theta^2)}} = \frac{1}{1.2} tdy^2 + \frac{1}{1.2.3} \text{etc.} \ldots ;$$

donc

$$Z = \frac{1}{1.2} t\sqrt{(1+\theta^2)}.dy^2 + \frac{1}{1.2.3} \text{etc....}$$

Donc le rayon ρ' de la section oblique est, au point que l'on considère,

$$\rho' = \frac{1}{t\sqrt{(1+\theta^2)}}, \qquad \text{donc} \qquad \rho' = \rho.\frac{1}{\sqrt{(1+\theta^2)}}.$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{(1+\theta^2)}}$ est le sinus de l'angle formé par le plan de la section oblique avec le plan de la section normale. Donc, enfin, *le rayon de la section oblique est égal au rayon de la section normale, multiplié par le sinus de l'angle formé par le plan de ces deux sections.* Beau théorême que Meusnier a trouvé le premier par des moyens particuliers,

Nous pourrions également démontrer, dès à présent, tous les théorêmes d'Euler sur la courbure des surfaces; mais nous préférons de le faire après avoir exposé les principes qui servent de base à la seconde partie de ce Mémoire.

§ II.

THÉORIE DES TANGENTES CONJUGUÉES.

ARTICLE PREMIER.

Équation des tangentes conjuguées.

Ce Mémoire, comme son titre l'indique, est spécialement destiné à développer la théorie des tangentes conjuguées; à montrer comment cette théorie peut conduire à la connaissance de tous les éléments de la courbure des surfaces; de toutes les variétés que cette courbure présente, et de ses propriétés générales ou

particulières : à faire voir, enfin, comment la même théorie, par ses équations fondamentales, peut conduire immédiatement à la connaissance des familles de surfaces dont la génération dépend d'éléments du second ordre, c'est-à-dire, seulement d'éléments de la courbure des surfaces.

Il importe donc de commencer par nous former une idée précise de ce que nous appelons *tangentes conjuguées :* l'analyse ensuite nous fournira leurs équations, et nous conduira jusqu'à chacun des buts que nous venons de nous proposer d'atteindre.

Si l'on conçoit qu'un plan, d'abord tangent à une surface quelconque, se meuve sans cesser de la toucher, il engendrera par ses intersections successives, une surface développable. Deux plans immédiatement consécutifs, se couperont suivant une ligne droite, arête de cette développable; or, cette arête (première droite) aura toujours un point de commun avec la courbe de contact de la surface développable et de la surface générale : concevons en ce point la tangente à leur courbe de contact. Nous aurons ainsi deux lignes droites tangentes à la surface générale, au même point de contact; en les considérant sous le point de vue de leurs rapports mutuels, nous les appellerons *tangentes conjuguées.* Trouvons donc l'équation des tangentes conjuguées.

Soit $dz = pdx + qdy$ l'équation différentielle du premier ordre d'une surface quelconque. L'équation de son plan tangent sera

$$(1) \dots \quad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes du plan, et x, y, z celle du point d'application. Concevons maintenant que ce point d'application x, y, z puisse varier de position, et prenne successivement toutes les positions dont il est susceptible, lorsque sa projection sur le plan des x, y décrit la courbe

$$(2) \dots \quad y = \varphi(x).$$

On sait que le plan (1) formera, par ses intersections successives, ainsi que nous venons de le dire, une surface développable déterminée (D) : c'est cette développable que nous allons d'abord considérér.

Lorsque le point x, y, z varie infiniment peu sur la courbe (2), le plan (1) prend une position infiniment voisine de la première, et l'on sait qu'alors l'intersection de ces deux plans consécutifs est une des arêtes rectilignes de la surface développable.

Déterminons l'équation de cette arête : x, y, z devenant $x+dx$, $y+dz$, $z+dz$, l'équation du plan (1), lorsque X, Y, Z ne varient pas, donne

$$-dz=-pdx-qdy+dp(X-x)+dq(Y-y).$$

Or, x, y, z est le point d'application sur la surface à double courbure dont l'équation est $dz=pdx+qdy$:

donc $$o=dp(X-x)+dq(Y-y)$$

est l'équation des points communs au plan (1), et au plan infiniment voisin. C'est l'équation de la projection sur le plan des x, y de la droite intersection de ces deux plans.

Mais comme p et q sont l'un et l'autre fonctions de x et y, on a

$$dp=rdx+sdy, \qquad dq=sdx+tdy,$$

valeur où $\frac{r}{2}$, s, $\frac{t}{2}$ sont les coefficients différentiels du second ordre de l'équation générale de la surface primitive. Leur substitution dans $o=dp(X-x)+dq(Y-y)$ donne

$$\frac{Y-y}{X-x}+\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}=o.$$

Dans cette équation, $\frac{Y-y}{X-x}$, exprime la tangente trigonométrique de l'angle formé sur le plan des x, y par l'axe des x et la projection de l'arête cherchée. Soit ψ' cette tangente, nous

aurons

$$\psi' + \frac{rdx + sdy}{sdx + tdy} = 0,$$

dans laquelle dy, dx appartiennent à la courbe (2), $y = \varphi(x)$ qui donne immédiatement $dy = \varphi'.dx$, ce qui transforme l'équation

$$\psi' + \frac{rdx + sdy}{sdx + tdy} = 0 \quad \text{en} \quad \psi' + \frac{r + s\varphi'}{s + t\varphi'} = 0, \text{ ou}$$

$$(A)\ldots \quad r + s(\varphi' + \psi') + t\varphi'\psi' = 0.$$

Telle est l'équation de condition qui lie entr'elles les positions de l'arête de (D), et de la tangente à la courbe de contact (2) de cette surface avec la primitive.

Or, cette équation est symétrique en φ' en ψ' : donc φ', au lieu d'appartenir à la tangente de la courbe de contact de (D), peut appartenir à l'arête d'une nouvelle surface développable (D'), et alors ψ', au lieu d'appartenir à l'arête de la première surface développable (D), appartiendra à la tangente de la courbe de contact de la seconde (D') : d'où résulte ce théorême général également applicable à toutes les surfaces possibles :

« Que sur une surface de la forme la plus arbitraire, on conçoive une première surface développable (D) qui la circonscrive dans toute l'étendue d'une certaine courbe c ; ensuite une seconde surface développable (D') qui la circonscrive pareillement dans toute l'étendue d'une courbe quelconque c' ; si au point P placé à la fois sur les deux courbes de contact, l'arête de (D) est tangente à la courbe c', lieu des contacts de (D'), réciproquement, l'arête de (D') passant par ce point, est tangente à la courbe c, lieu des contacts de (D) sur la surface générale. Ces deux droites, réciproquement arêtes et tangentes, sont celles que nous avons nommées *tangentes conjuguées* par rapport aux surfaces quelconques. » Nous offrirons encore d'autres raisons de cette dénomination.

ARTICLE II.

Application aux lignes de courbure des surfaces.

Lorsque les tangentes conjuguées deviennent réciproquement orthogonales, nous savons qu'au point de leur intersection elles sont tangentes aux lignes des courbures principales de la surface (Ier Mémoire, § IV), et nous ferons voir dans l'article IV de ce §, la légitimité de cette assertion : maintenant il nous suffit d'appeler *lignes de courbure*, celles qui partout sont dirigées tangentiellement aux tangentes conjuguées orthogonales : l'expression différentielle qui donnera la condition d'orthogonalité de ces tangentes, sera donc l'équation différentielle même des lignes de courbure.

Soient $\begin{matrix} a(Z-z)+X-x=0, \\ b(Z-z)+Y-y=0, \end{matrix}$ et $\begin{matrix} a'(Z-z)+X-x=0, \\ b'(Z-z)+Y-y=0, \end{matrix}$

les équations des deux tangentes conjuguées projetées sur les plans des x, z et des y, z.

En conservant les notations φ et ψ (*) de l'article précédent, on aura évidemment

$$\frac{b}{a}=\varphi, \qquad \frac{b'}{a'}=\psi.$$

Maintenant les deux tangentes conjuguées devant être l'une et l'autre sur le plan tangent,

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

on a d'abord

$$1+ap+bq=0,$$
$$1+a'p+b'q=0,$$

(*) Pour ne pas trop charger nos formules par des accents, nous mettrons à l'avenir φ et ψ simplement pour désigner les tangentes trigonométriques jusqu'ici désignées par φ' et ψ'. Alors nous aurons

$$dy=\varphi dx, \quad dy=\psi dx, \qquad \text{au lieu de} \qquad dy=\varphi' dx, \quad dy=\psi' dx.$$

et parce qu'elles sont à angle droit, il faut encore qu'on ait

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

Or, ces trois équations donnent immédiatement

$$aa' + bb' + (ap + bq)(a'p + b'q) = 0,$$

ou

$$1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'} + \left(p + \frac{b}{a}q\right)\left(p + \frac{b'}{a'}q\right) = 0,$$

équation qui, par la substitution de φ et ψ pour $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$, devient, en ordonnant convenablement les termes,

$$(\text{B})\ldots\ 1 + p^2 + pq(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\varphi\psi = 0;$$

c'est la condition pour que deux tangentes conjuguées, représentées en direction par φ et ψ, soient réciproquement orthogonales. Cette équation appartient donc elle-même aux lignes de courbure.

Donc les lignes des deux systèmes de courbure sont données en φ et ψ par deux équations, l'une (A), exprimant seulement qu'elles sont dirigées suivant des tangentes conjuguées, l'autre (B), qu'elles se croisent à angle droit. Rapprochons ces deux équations:

$$(\text{A})\ldots\quad r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = 0,$$

$$(\text{B})\ldots\ 1 + p^2 + pq(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\varphi\psi = 0.$$

Si nous faisons $1 + p^2 = r'$, $pq = s'$, $1 + q^2 = t'$, l'équation (B) sera d'une forme entièrement semblable à l'équation (A), c'est-à-dire que r et r', s et s', t et t', y entreront absolument de la même manière.

Il est d'ailleurs évident qu'il n'entre que des fonctions symétriques de φ et ψ dans

$$(\text{A})\ldots\ r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = 0,$$

$$[\text{B}]\ldots\ r' + s'(\varphi + \psi) + t'\varphi\psi = 0.$$

Si donc nous voulons obtenir une équation unique qui embrasse

IIme MÉMOIRE.

à la fois les deux valeurs $\frac{dy}{dx}$ de φ et ψ; en prenant leur somme simple et leur produit, nous aurons (*)

$$\varphi+\psi=-\frac{t'r-r't}{t's-s't},$$
$$\varphi\psi=\frac{s'r-r's}{t's-s't};$$

donc, d'après le théorême connu sur les coefficients des équations,

$$[C]\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(t's-s't)+\frac{dy}{dx}(t'r-r't)+(s'r-r's)=0$$

est l'équation unique des lignes de courbure. Si, en effet, nous remettons pour r', s', t' leurs valeurs $1+p^2$, pq, $1+q^2$, nous aurons

$$(C)\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t]$$
$$+pqr-(1+p^2)s=0,$$

équation identique avec celle donnée par Monge, feuille 19e d'Analyse appliquée, et auparavant dans un Mémoire sur les déblais et remblais. (Mém. de l'Acad. des Scienc. de Paris pour l'année 1781.) C'est aussi ce qui devait être, puisque nous avons adopté les

---

(*) Autrement : Pour séparer φ et ψ, on observera que les équations (A) et (B) peuvent être mises sous la forme $\psi+\frac{r+s\varphi}{s+t\varphi}=0$, $\psi+\frac{r'+s'\varphi}{s'+t'\varphi}=0$, ce qui donne immédiatement

$$\frac{r+s\varphi}{s+t\varphi}-\frac{r'+s'\varphi}{s'+t'\varphi}=0,\quad \text{d'où}\quad \varphi^2(t's-s't)+\varphi(t'r-r't)+(s'r-r's)=0;$$

équation qui donnera pour racines les deux valeurs φ et ψ correspondantes à chaque point, et qui sera elle-même l'équation différentielle des lignes de courbure, en supposant que $\varphi=\frac{dy}{dx}$, soit l'équation différentielle de la courbe touchée constamment par une des tangentes conjuguées orthogonales : cette courbe est dans ce cas-ci, une ligne de courbure de la surface que nous considérons.

désignations par lesquelles ce géomètre a représenté les coefficients différentiels qui en sont les éléments. IIme MÉMOIRE.

On peut mettre l'équation des lignes de courbure sous cette forme très-élégante, (C)...

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{pq}{s}-\frac{1+q^2}{t}\right)st+\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+p^2}{r}-\frac{1+q^2}{t}\right)rt+\left(\frac{1+p^2}{r}-\frac{pq}{s}\right)rs=0,$$

ou plus simplement

$$[C]\ldots\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{s'}{s}-\frac{t'}{t}\right)st+\frac{dy}{dx}\left(\frac{r'}{r}-\frac{t'}{t}\right)rt+\left(\frac{r'}{r}-\frac{s'}{s}\right)rs=0.$$

Pour découvrir l'analogie des trois coefficients de cette équation, écrivons ainsi les trois rapports :

$$1^{er}\ldots\ \frac{r'}{r}=\frac{1+p^2}{r},$$

$$2^e\ldots\ \frac{s'}{s}=\frac{pq}{s},$$

$$3^e\ldots\ \frac{t'}{t}=\frac{1+q^2}{t}.$$

Les différences 2e-3e, $1^{er}-3^e$, 3e-2e, multipliées respectivement par les r, s, t qu'elles contiennent, seront les trois coefficients cherchés.

Il est plus utile qu'on ne pense, de donner aux résultats analytiques une forme symétrique et facile à retenir : celle-ci est d'autant plus remarquable que, tout en soulageant la mémoire, elle rappelle entre les r, s, t et les p, q, une analogie qui se présentera souvent, et dont la considération nous sera d'une grande utilité.

On voit par la marche que nous avons suivie, qu'on peut également représenter le système des deux lignes de courbure, par une équation unique,

$$(C)\ldots\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t]$$
$$+pqr-(1+q^2)s=0,$$

IIme MÉMOIRE. ou

$$[C]\ldots \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{s'}{s}-\frac{t'}{t}\right)st+2\frac{dy}{dx}\left(\frac{r'}{r}-\frac{t'}{t}\right)rt+\left(\frac{r'}{r}-\frac{s'}{s}\right)rs=0,$$

et par le système très-simple des deux équations

$$(A)\ldots\quad r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,$$
$$(B)\ldots\quad 1+p^2+pq(\varphi+\psi)+(1+q^2)\varphi\psi=0,$$

ou

$$(A)\ldots\quad r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,$$
$$[B]\ldots\quad r'+s'(\varphi+\psi)+t'\varphi\psi=0.$$

Dans ces dernières équations, φ et ψ représentent sur le plan des x, y, des tangentes trigonométriques appartenant à la direction des lignes de courbure. Ces dernières équations ont l'avantage de présenter isolément les relations de φ et ψ avec les éléments du premier ordre p, q, et avec ceux du second r, s, t; de manière que lorsqu'on n'aura besoin de connaître qu'une seule relation entre φ et ψ, on pourra choisir celle de ces relations qu'on voudra, suivant que les éléments du premier ou du second ordre seront plus ou moins avantageux à employer. J'ajouterai, enfin, que toutes les fois qu'il s'agira de déterminer des relations quelconques entre les lignes de l'une et de l'autre courbure, il sera plus facile et souvent plus élégant de se servir du système de ces équations, que de comparer entr'elles les valeurs radicales de l'équation générale (C) qui embrasse à la fois les lignes des deux systèmes de courbure : c'est ce dont nous présenterons plusieurs exemples.

ARTICLE III.

Des rayons de courbure des surfaces et de ceux de leurs sections normales.

Pour déterminer sur la surface quelconque (S) ayant pour équation du premier ordre, $dz=pdx+qdy$, le rayon osculateur

d'une section normale quelconque au point x, y, z; en appelant x', y', z' les coordonnées du centre de courbure, et ρ la grandeur du rayon, nous aurons d'abord

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Mais le rayon ρ est dirigé suivant la normale de (S) au point x, y, z; il faudra donc que ses extrémités ou les points x, y, z et x', y', z' soient l'un et l'autre sur cette normale, dont les équations générales sont

$$x - X + p\,(z - Z) = 0;$$
$$y - Y + q\,(z - Z) = 0,$$

X, Y, Z étant les coordonnées *courantes;* x, y, z celles du point d'application sur (S) : donc nous aurons entre x, y, z et x', y', z' les deux équations de condition,

$$x - x' + p\,(z - z') = 0,$$
$$y - y' + q\,(z - z') = 0;$$

d'où

$$\rho^2 = (z - z')^2\,(1 + p^2 + q^2) \quad \text{et} \quad \rho = (z - z')\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2};$$

faisant donc $\alpha = \sqrt{(1 - p^2 + q^2)}$, on a

$$\rho = \alpha\,(z - z')\ldots\ldots$$

Marchons maintenant sur la surface (S), dans le sens de la section normale que nous considérons et pour laquelle $\frac{dy}{dx} = \psi$.

x, y, z variant infiniment peu de grandeur, le rayon ρ et les coordonnées x', y', z' du centre de courbure ne varieront pas : donc la différentielle de ρ ou de ρ^2 sera nulle, ce qui donne pour différentielle du premier ordre, à cause de $dy = \psi dx$, $d^2y = \psi' dx^2$.

$$0 = x - x' + (y - y')\,\psi + (z - z')(p + q\psi),$$

et pour différentielle du second ordre,

$$0 = 1 + \psi^2 + (p + q\psi)^2 + (z - z')(r + 2s\psi + t\psi^2),$$

IIme MÉMOIRE. en observant que les deux termes $(y-y')\psi'+(z-z')q\psi'$ s'évanouissent d'eux-mêmes en vertu de l'équation de condition $y-y'+q(z-z')=0$. On a donc immédiatement

$$z-z'=-\frac{1+p^2+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2},$$

ou bien, en reprenant la notation r', s', t' que nous avons déjà employée,

$$z-z'=-\frac{r'+2s'\psi+t'\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2},$$

et par conséquent,

$$\rho=-a.\frac{r'+2s'\psi+t'\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2},$$

équation où ψ, comme nous l'avons dit, est la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe des x et par la projection, sur le plan des x, y, de la touchante de la section normale que nous considérons.

A présent, comparons ce rayon de courbure avec celui de la section normale qui passe par la tangente conjuguée à la première tangente, et conservons aux signes ψ et φ l'expression que nous leur avons donnée jusqu'ici.

$$\text{(A)}\dots\quad r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0$$

est, comme nous savons, l'équation de condition à laquelle deux tangentes au même point de la surface (S), doivent satisfaire pour être conjuguées. Nommant P le rayon de la section normale correspondante à ρ, nous aurons évidemment

$$\mathrm{P}=-a.\frac{r'+2s'\varphi+t'\varphi^2}{r+2s\varphi+t\varphi^2}.$$

Demandons-nous quelle doit être la valeur de $\mathrm{P}+\rho$, *somme des rayons* ρ *et* P *de deux sections conjuguées ?* Elle sera d'abord

$$\rho+\mathrm{P}=-a.\left(\frac{r'+2s'\psi+t'\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2}+\frac{r'+2s'\varphi+t'\varphi^2}{r+2s\varphi+t\varphi^2}\right).$$

Réduisons les deux fractions du second membre au même déno-
minateur; et pour le faire avec plus de simplicité, observons d'abord qu'en retranchant de chaque dénominateur la quantité $r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = 0$, on n'en change pas la valeur. Mais alors ils deviennent, le premier,

$$s(\psi - \varphi) + t\psi(\psi - \varphi) = (\psi - \varphi)(s + t\psi),$$

le second,

$$(\varphi - \psi)(s + t\varphi).$$

Réduisant tout au même dénominateur, nous aurons

$$\rho + \mathrm{P} = -\frac{\alpha}{\psi - \varphi}\cdot\frac{(r' + 2s'\psi + t'\psi^2)(s + t\varphi) - (r' + 2s'\varphi + t'\varphi^2)(s + t\psi)}{(s + t\psi)(s + t\varphi)}.$$

Développant les produits du numérateur, et supprimant les termes $+ r's - r's + 2s't\psi\varphi - 2s't\varphi\psi$, qui se détruisent, on a

$$\begin{array}{l} r't.\varphi + 2s's.\psi + t's.\psi^2 + t'\varphi\psi.\psi \\ - r't.\psi - 2s's.\varphi - t's.\varphi^2 - t'\varphi\psi.\varphi. \end{array}$$

Divisant par $\varphi - \psi = -(\psi - \varphi)$, qui disparaîtra des deux termes, il vient

$$r't - 2s's - t'[s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi],$$

ou

$$r't - 2s's + t'r,$$

puisque l'équation (A) donne $s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = -r$.

Donc le numérateur de $\rho + \mathrm{P}$ se réduit simplement à

$$\alpha(r't - 2s's - t'r);$$

et de même le dénominateur

$$(s + t\psi)(s + t\varphi) = s^2 + t[s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi] = s^2 - rt,$$

ou

$$-(rt - s^2):$$

donc enfin,

$$\rho + \mathrm{P} = -\alpha.\frac{r't - 2s's + t'r}{rt - s^2},$$

ou, en développant,

$$\rho + \mathrm{P} = -\alpha.\frac{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r}{rt - s^2}.$$

 On observera que cette valeur de $\rho + P$ est indépendante de φ et ψ, d'où résulte cette propriété générale des surfaces : *La somme des rayons de courbure des diverses sections normales d'une surface quelconque, conjuguées et prises deux à deux, est pour un même point de cette surface une grandeur constante.*

Les rayons de courbure de la surface même, appartenant aux sections normales faites suivant les tangentes conjuguées réciproquement orthogonales, il s'ensuit que *la somme des rayons de courbure des sections normales conjuguées est une constante égale à la somme des deux rayons de courbure de la surface, au point que l'on considère.* C'est, comme on voit, une équation du premier degré, entre les deux rayons de courbure d'une surface en chacun de ses points ; et cette relation est par conséquent d'un ordre encore plus simple que celle qui réunit les tangentes conjuguées et les lignes de courbure ; puisque les équations (A), (B) de ces lignes sont l'une et l'autre du second degré en φ et ψ.

Si nous voulons que ρ et P ne soient pas seulement les rayons de deux sections normales conjuguées, mais qu'ils soient particulièrement ceux de courbure de la surface, il faudra que φ et ψ soient alors liés entr'eux par les relations qu'établissent les équations (A) et (B) des lignes de courbure. Pour cela, il faudrait généralement prendre les valeurs de ρ et P en φ et ψ, supposer entre ces deux dernières grandeurs les relations données par les équations (A) et (B) ; les éliminer de ces quatre équations, ce qui donnerait d'abord les valeurs radicales de ρ et P : en faisant ensuite disparaître les radicaux, on s'éleverait à l'équation unique qui contient les valeurs simultanées de ρ et P comme racines. Mais cette opération effectuée ainsi, jetterait dans de trop longs calculs, et l'on peut parvenir au même résultat par une voie moins pénible : la voici.

Comparons d'abord les valeurs de (ρ), (P); (A) et (B).

$$(\rho)\ldots.\ \rho = -\alpha.\frac{r' + 2s'\psi + t'\psi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2},$$

$$(\mathrm{P})\ldots.\ \mathrm{P} = -\alpha.\frac{r' + 2s'\varphi + t'\varphi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2},$$

$$[\mathrm{B}]\ldots.\ 0 = r' + s'(\varphi + \psi) + t'\varphi\psi,$$

$$(\mathrm{A})\ldots.\ 0 = r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi.$$

A la seule inspection de ces valeurs ainsi rapprochées, on voit que les numérateurs de ρ et P se déduisent de leurs dénominateurs, comme l'équation (B) se déduit de l'équation (A). Il suffit, en effet, dans l'un et l'autre de ces cas, de changer r' en r, s' en s, t' en t. Mais en cherchant la valeur de $\rho + \mathrm{P}$, nous avons vu que les dénominateurs de ρ et P se réduisent, au moyen de l'équation (A), à

$$(\psi - \varphi)(s + t\psi) \quad \text{et} \quad (\varphi - \psi)(s + t\varphi).$$

Donc, au moyen de l'équation [B], leurs numérateurs se réduiront à

$$(\psi - \varphi)(s' + t'\psi) \quad \text{et} \quad (\varphi - \psi)(s' + t'\varphi).$$

Les rayons ρ et P, lorsqu'ils sont les rayons de courbure, prennent donc d'abord cette forme très-simple,

$$[\rho] = -\alpha.\frac{s' + t'\psi}{s + t\psi}\ (*),$$

$$[\mathrm{P}] = -\alpha.\frac{s' + t'\varphi}{s + t\varphi}.$$

(*) Si l'on observe que les équations (A) et [B] peuvent être mises sous la forme

$$(\mathrm{A})\ldots.\ r + s\psi + (s + t\psi)\,\varphi = 0,$$

$$[\mathrm{B}]\ldots.\ r' + s'\psi + (s' + t'\psi)\,\varphi = 0,$$

on verra que $\frac{s' + t'\psi}{s + t\psi} = \frac{r' + s'\psi}{s + s\psi}$, de même $\frac{s' + t'\varphi}{s + t\varphi} = \frac{r' + s'\varphi}{t + s\varphi}$.

Donc aussi les deux rayons de courbure de la surface peuvent être présentés sous cette forme

$$[\rho]\ldots.\ \rho = -\alpha.\frac{r' + s'\psi}{r + s\psi} \quad \text{et} \quad [\mathrm{P}]\ldots\ \mathrm{P} = -\alpha.\frac{r' + s'\varphi}{r + s\varphi}.$$

IIme MÉMOIRE. Ces valeurs développées donneront

$$[\rho] = -\alpha.\frac{pq+(1+q^2)\psi}{s+t\psi},$$

$$[P] = -\alpha.\frac{pq+(1+q^2)\varphi}{s+t\varphi}.$$

Maintenant, pour obtenir une équation unique qui donne simultanément les valeurs $[\rho]$ et $[P]$, comme déjà nous en connaissons la somme $\rho+P=-\alpha.\frac{t'r-2s's+r't}{rt-s^2}$.

Nous n'avons plus qu'à chercher la valeur de leur produit ρP.

Or, $rt-s^2$ est le produit des dénominateurs ; donc $\alpha^2(r't'-s')^2$ est celui des numérateurs. Donc enfin,

$$\rho P = \alpha.\frac{r't'-s'^2}{rt-s^2} = \frac{\alpha^4}{rt-s^2} \text{ (*)}.$$

Ainsi le système des équations qui font connaître les rayons de courbure est

$$[\text{I}]\ldots\quad \rho + P = \frac{(1+q^2)r-2pq.s+(1+p^2)t}{rt-s^2}.\alpha,$$

$$[\text{II}]\ldots\quad \rho P = \frac{\alpha^4}{rt-s^2}.$$

Donc l'équation générale des rayons de courbure est, en appelant R la racine commune,

$$(rt-s^2)R^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{(1+p^2+q^2)}.R$$
$$+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Monge a désigné $rt-s^2$ par g, $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r$ par h, et $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ par k, et il a obtenu $gR^2+hkR+k^4=0$, pour équation aux rayons de courbure : l'identité de ces résultats est évidente : cette équation peut être mise aussi sous la forme,

$$R^2(rt-s^2)+R(rt'-2ss'+tr')(r't'-s'^2)^{\frac{1}{2}}+(r't'-s'^2)=0.$$

(*) En effet, on a $r't'-s'^2=(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2=1+p^2+q^2$. Or $\alpha=\sqrt{(1+p^2+q^2)}$.

Les réflexions que nous avons présentées en parlant des équations des tangentes conjuguées et des lignes de courbure, sont également applicables ici, où nous faisons entrer séparément dans nos calculs les rayons de l'une et de l'autre courbure, comme ceux des deux sections normales conjuguées. Ainsi nous en tirerons les mêmes conséquences sur les avantages que présentera l'emploi de ces équations, dans l'analyse des surfaces dont les courbures sont liées entr'elles par une loi quelconque.

Avant de terminer cet article, nous ferons remarquer une fonction symétrique des deux rayons de courbure [ρ] et [P], dont la considération est très-importante..... Puisque

$$[\mathrm{I}]\ldots\rho + \mathrm{P} = -\alpha.\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2},$$

et $[\mathrm{II}]\ldots\ldots\rho\mathrm{P} = \frac{\alpha^4}{rt - s^2}$,

$$\frac{\rho + \mathrm{P}}{\rho\mathrm{P}} = -\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\alpha^3} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mathrm{P}}:$$

C'est la somme des valeurs inverses de [ρ] et [P].

On aurait pu, d'ailleurs, tirer immédiatement la valeur $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mathrm{P}}$ de l'équation du second degré en R dont les racines sont ρ et P; car, en y mettant $\frac{1}{\mathrm{R}}$ pour R, on aurait eu pareillement pour second terme réduit, et pris avec le signe moins,

$$-\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\alpha^3},$$

c'est la somme des nouvelles racines $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mathrm{P}}$.

ARTICLE V.

Du plus grand et du plus petit rayon de courbure des surfaces.

Nous connaissons déjà la limite qui sépare les deux courbures d'une surface courbe; mais nous ignorons encore quelle est, pour

IIme MÉMOIRE. chacune d'elles, la seconde limite de cette grandeur; celle qui, par exemple, pour les petites courbures, présente la moindre des courbures; et qui, pour les grandes courbures de la surface, présente la plus grande des courbures. Proposons-nous de déterminer ces valeurs extrêmes.

Il est évident que ces courbures correspondent à la plus grande et à la plus petite valeur que puissent prendre les rayons ρ et P des sections normales de la surface. Il faut donc que leur valeur soit alors un *maximum* ou un *minimum*, et par conséquent, que leur différentielle, prise en passant d'un rayon au suivant, soit nulle.

Or, le rayon d'une section normale quelconque est (article précédent),

$$(\rho)\ldots\ldots \rho = -a\cdot\frac{r'+2s'\psi+t'\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2}.$$

Donc $d\rho = 0$, pris par rapport à ψ, donne immédiatement

$$(r'+2s'\psi+t'\psi^2)(s+t\psi)-(r+2s\psi+t\psi^2)(s'+t'\psi)=0,$$

d'où

$$\frac{r'+2s'\psi+t'\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2}=\frac{s'+t'\psi}{s+t\psi}.$$

Mais le premier membre de cette équation, multiplié par $-a$, est la valeur du rayon de la section normale qui doit être un *maximum* ou un *minimum* (*);

Et le second membre, pareillement multiplié par $-a$, est celle du rayon même de courbure de la surface; c'est-à-dire, du rayon de la section normale dirigée suivant une des lignes que nous avons nommées *lignes de courbure. La courbure de la surface est donc effectivement un* maximum *ou un* minimum, *suivant les lignes dites de plus grande et de moindre courbure.*

(*) Des deux valeurs φ et ψ qui correspondent aux deux sections normales limites, l'une est un *maximum* quand l'autre est un *minimum*; puisque leur somme est égale à celle des rayons de deux sections normales conjugées quelconques.

Dans l'article II de ce §, nous avons déterminé les lignes de courbure par leurs relations avec les tangentes conjuguées ; nous venons de les déterminer maintenant par leurs relations avec la courbure des sections normales, et nous rentrons ainsi dans le cercle des propriétés à qui elles ont dû leur dénomination.

Et puisque nous avons fait voir que les directions des deux lignes de courbure qui se croisent en chaque point, sont constamment orthogonales, il faut en conclure cet admirable théorême d'Euler, qui a été pour la géométrie moderne la source des plus grands progrès :

En chaque point d'une surface, les deux directions de plus grande et de moindre courbure sont constamment à angle droit.

Mais c'est ici le lieu de faire connaître les autres propriétés de la courbure des surfaces, qu'on doit à ce géomètre si fécond en résultats heureux.

ARTICLE V.

Démonstration de plusieurs théorêmes d'Euler sur la courbure des surfaces.

Pour opérer avec plus de facilité, sans nuire d'ailleurs à la généralité des résultats, supposons que le plan tangent en x, y, z soit parallèle au plan des x, y : ce qui ne change rien à la forme de la surface ; alors nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = p = 0, \quad \frac{dz}{dy} = q = 0; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 1;$$

et ensuite

$$r' = 1 + p^2 = 1, \quad s' = pq = 0; \quad t' = 1 + q^2 = 1.$$

Donc enfin on a, pour le rayon normal quelconque,

$$(\rho)\ldots\quad \rho = -\frac{1+\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)\ldots\quad \frac{1}{\rho} = -\frac{r+2s\psi+t\psi^2}{1+\psi^2}.$$

Maintenant, à la place de la tangente ψ, mettons la tangente d'une section perpendiculaire à la première, c'est-à-dire, $-\frac{1}{\psi}$; nous aurons un nouveau rayon ρ' qui donnera

$$\left(\frac{1}{\rho'}\right)\ldots\quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{r\psi^2-2s\psi+t}{1+\psi^2},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'} = -(r+t).$$

Mais ce résultat ne contient pas ψ; donc la somme $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ restera la même pour toutes les valeurs qu'on pourra donner à ψ; il faut donc en conclure ce théorême général:

Si deux sections planes sont faites à angle droit suivant la normale quelconque d'une surface, en divisant l'unité successivement par les deux rayons osculateurs de ces sections, la somme des deux quotients sera constante dans toutes les positions que pourront prendre les deux sections normales quelconques.

Passons à d'autres propriétés. Sans rien changer à la courbure de la surface au point x, y, z, non-seulement nous pouvons supposer $p=0$, $q=0$, mais aussi $s=0$. Puisque la transformation générale des coordonnées orthogonales permet de disposer arbitrairement de trois grandeurs.

Par cette nouvelle hypothèse, l'équation des tangentes conjuguées

$$(A)\ldots\qquad r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,$$

deviendra simplement

$$r+t\varphi\psi=0.$$

Si maintenant on veut avoir les valeurs de φ et ψ qui correspondent aux deux directions des tangentes conjuguées orthogonales, c'est-à-dire, aux directions des deux courbures principales, leur orthogonalité exigera qu'on ait $1+\varphi\psi=0$. Pour que cette équation n'implique pas contradiction avec $r+t\varphi\psi=0$; il faudra que $\varphi\psi$ devienne de la forme $\frac{0}{0}$ (à moins qu'on n'ait $r=t$, cas particulier dont nous nous occuperons avec détail). Ainsi φ sera nul, et ψ infini. Mais φ et ψ représentent ici, par hypothèse, la direction $\frac{dy}{dx}$ des deux courbures principales : donc *lorsque* s = o, *les directions des deux courbures principales de la surface sont celles mêmes des axes des* x *et des* y.

Par l'hypothèse $s=0$, la valeur inverse du rayon d'une section normale quelconque devient

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)\ldots\quad \frac{1}{\rho}=-\frac{r+t\psi^2}{1+\psi^2},$$

tandis que la valeur inverse des deux rayons de courbure devient, en faisant tour à tour dans cette expression $\psi=0$ et $\psi=\frac{1}{0}$,

$$\left[\frac{1}{\rho}\right]=-r,\quad \left[\frac{1}{\rho_{\prime}}\right]=-t.$$

Si donc nous observons que $\frac{1}{1+\psi^2}$ est le quarré du cosinus de l'angle formé par l'axe des x, avec la section dont ρ est le rayon; tandis que $\frac{\psi^2}{1+\psi^2}$ est le quarré du sinus de ce même angle; en le désignant par ω, nous aurons immédiatement

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)=\left[\frac{1}{\rho}\right]\cos^2\omega+\left[\frac{1}{\rho_{\prime}}\right]\sin^2\omega;$$

c'est-à-dire que « la valeur inverse du rayon d'une section normale quelconque, est égale à la somme des valeurs inverses des deux rayons de la surface même, multipliés respectivement par le

II.me MÉMOIRE. quarré du cosinus de l'angle que forme chaque direction principale de courbure, avec la section normale que l'on considère. »

L'équation précédente peut être mise immédiatement sous cette forme

$$(\rho)=\frac{[\rho'\rho_{,}]}{\rho'\sin^2\omega+\rho_{,}\cos^2\omega}.$$

Mais, par les principes de la trigonométrie, on sait que

$$\sin^2\omega=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\omega,$$
$$\cos^2\omega=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\omega;$$

donc

$$(\rho)=\frac{2[\rho'\rho_{,}]}{[\rho'+\rho_{,}]-[\rho'-\rho_{,}]\cos 2\omega}.$$

Ce dernier rapprochement fournit la construction la plus élégante et la plus simple pour déterminer le rayon (ρ) d'une section normale quelconque, en fonction de l'angle ω que fait le plan de cette section avec l'une des courbures principales. (Voyez la note II.)

ARTICLE VI.

Application des théorèmes précédents à la théorie de l'action capillaire.

L'auteur de la Méchanique Céleste, après avoir développé les lois de l'attraction des grandes masses planétaires, a transporté la même analyse à ces phénomènes si délicats que, pour indiquer la petitesse des distances qui les rendent sensibles, on a cru devoir donner à leur cause le nom d'action *capillaire*. Il n'entre pas dans notre sujet de parler des méthodes de méchanique par lesquelles sont développées les lois de cette attraction singulière; mais la même théorie offrant une des applications les plus marquantes et les plus heureuses des propriétés du contact et de la

courbure des surfaces, nous devons faire connaître l'esprit de cette application : par là nous répandrons un nouvel intérêt sur les vérités abstraites que nous venons d'exposer.

Lorsqu'un fluide communique entre deux plans fort voisins, ou dans un tube très-étroit, tantôt il s'élève au-dessus du niveau naturel du reste du fluide; tantôt il reste plus bas : rarement, enfin, se place-t-il à la même élévation que le fluide extérieur avec lequel il communique.

Dans les deux cas les plus fréquents, la surface du fluide élevée ou déprimée, n'est plus horizontale; elle est concave dans le premier, et convexe dans le second.

Or, la courbure plus ou moins grande affectée par la surface extérieure du fluide, et l'élévation ou la dépression de ce fluide, étant les effets simultanés d'une même cause, ont entr'elles une relation nécessaire : exprimons cette relation.

Supposons d'abord que la surface du fluide renfermé dans un tube, soit sphérique. Chaque molécule de la colonne renfermée dans le tube, attire et est attirée suivant une force qui, comme nous l'avons dit, n'est sensible qu'à des distances insensibles. Si donc on cherche, d'après cette condition, l'action de la masse fluide sphérique sur une de ses molécules; cette action dirigée de la molécule au centre de la sphère, sera composée de deux parties bien distinctes, l'une agissant de haut en bas, l'autre de bas en haut.

La première K, fig. 2, représentera l'effet de la masse fluide en la supposant terminée par un plan IOK; la seconde représentera l'effet *opposé* du reste de la masse fluide comprise entre le plan tangent IOK et la partie sphérique NOM (c'est ce qu'on appelle un *ménisque*).

Il est visible que si la surface NOM est concave, la masse fluide étant composée des deux parties EIOKF, MIOKN, l'effet de la masse entière sera la *différence* de leurs effets. (Voyez la note III.)

Au contraire, si la surface est convexe, fig. 3 l'effet de la masse

IIme MÉMOIRE. fluide EMONF sera la *somme* des effets de la partie plane EIOKF, et du ménisque MIOKN.

La première grandeur K est nécessairement indépendante de la seconde, elle est toujours la même; tandis que l'autre $= \frac{\text{const.}H}{\rho}$ est réciproquement proportionnelle au rayon ρ de la sphère MON; c'est-à-dire que si dans deux cas différents, le fluide est terminé par une portion de la sphère dont ρ' soit le rayon, ou de la sphère dont $\rho_{\prime}$ soit le rayon, les actions des parties sphériques MIOKN seront représentées par $\frac{H}{\rho'}$ et $\frac{H}{\rho_{\prime}}$; la demi-somme de leurs actions serait donc $= \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\rho'} + \frac{H}{\rho_{\prime}}\right)$: donc aussi la moitié de l'action totale du fluide sera, suivant les deux cas, fig. 2 et 3,

$$K \mp \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\rho'} + \frac{H}{\rho_{\prime}}\right).$$

Arrivons maintenant au cas général.

L'action capillaire n'ayant lieu qu'à des distances insensibles; si *h* est la limite de la hauteur où cette action cesse d'être sensible, il est évident qu'une portion sensible de sphère fluide la sphère même toute entière n'ont pas plus d'action sur un point quelconque, qu'un de leurs segments *très-petit*, et dont la flèche *f* est dirigée sur ce point.

Mais dans l'étendue d'un segment très-petit, une surface se confond sensiblement avec toutes les surfaces qui l'osculent. Cette action de la sphère ou de son simple segment, est donc égale à l'action d'une surface particulière dont les deux rayons de courbure seraient sur la flèche du petit segment, égaux au rayon de la sphère. Ainsi, par exemple, la sphère pourrait être remplacée par une surface de révolution ayant son sommet à l'extrémité de la flèche du segment, et le grand cercle de la sphère pour cercle osculateur de ses méridiens.

De même ensuite, lorsque la surface du fluide est quelconque, le petit segment dont la flèche est f a sur tous les points du prolongement de cette flèche, la même action que le corps terminé par la surface entière, ou terminé par une surface quelconque osculant la primitive au sommet du petit segment (c'est-à-dire, à l'extrémité de la flèche f).

Mais au lieu de substituer une osculatrice unique à la surface du fluide renfermée dans le tube, ce qui ne serait que reculer la difficulté sans la vaincre, suivons une autre marche. Supposons que la flèche f soit l'axe du tube, ou simplement la normale à la surface fluide, qui est en même temps verticale (on voit qu'ici nous supposons le tube vertical). Menons par cette flèche une infinité de plans verticaux qui tracent sur la surface du fluide une infinité de sections normales : ces plans, d'ailleurs, étant tels que chacun forme, avec le suivant, un angle constant $d\pi$. A chaque zône de la surface terminée par deux sections normales consécutives, nous pourrons substituer une zône sphérique ayant pour méridien le cercle osculateur de cette zône ; car le petit filet triangulaire ONN'n, fig. 4, compris entre les deux zônes sphérique et quelconque ONN', ONn; ce filet, dis-je, sera toujours infiniment petit par rapport à la tranche OMNN'O comprise entre la zône quelconque, et les deux plans consécutifs qui limitent les deux zônes.

Si donc le rayon général de la section normale est ρ, on aura $\frac{H}{\rho}$ pour l'action du ménisque entier, et $\frac{H}{\rho} \cdot \frac{d\pi}{\pi}$ pour l'action d'une *tranche* comprise entre deux plans formant un angle $d\pi$ (π est la demi-circonférence).

Mais nous venons de voir que cette action est aussi celle de la tranche correspondante de la surface quelconque ; on aura donc enfin $\int \frac{H}{\rho} \cdot \frac{d\pi}{\pi}$ pour l'action totale du ménisque terminé par la surface quelconque ; et parce que $d\pi$ et π sont les mêmes pour

IIme MÉMOIRE. toutes les valeurs de ρ, j'aurai simplement $H\frac{d\pi}{\pi}\int\frac{1}{\rho}$ pour cette action du ménisque; donc l'action même de la masse entière du fluide sera $K\mp\frac{Hd\pi}{\pi}\int\frac{1}{\rho}$, suivant que le ménisque MIOKN sera concave ou convexe.

Si donc je conçois qu'à partir d'une première section normale, je détermine premièrement les rayons ρ', ρ'', ρ''',.... des sections normales faisant avec la première un angle égal à 1, 2, 3,...fois $d\pi$ jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ ou l'angle droit; ensuite les rayons $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime\prime}$, $\rho_{\prime\prime\prime}$..... des sections normales formant avec la première un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, plus 1, 2, 3,... fois $d\pi$; il est évident que les sections ayant respectivement pour rayon ρ' et $\rho_{\prime}$, ρ'' et $\rho_{\prime\prime}$, ρ''' et $\rho_{\prime\prime\prime}$, etc. seront à angle droit (*).

Mais on sait qu'en chaque point d'une surface, les valeurs inverses des rayons osculateurs des sections normales jouissent d'une propriété bien précieuse, c'est que leur somme est constante quand ils appartiennent à deux sections réciproquement orthogonales. (Voyez l'article précédent.)

On a donc immédiatement

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_{\prime}}=\frac{1}{\rho''}+\frac{1}{\rho_{\prime\prime}}=\ldots\ldots=\frac{1}{\rho^{v}}+\frac{1}{\rho_{v}}.$$

Si donc je développe ainsi la somme des valeurs inverses $\frac{1}{\rho}$, qui correspondent à cette section normale, j'aurai

$$\int\frac{1}{\rho}=\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_{\prime}}\right)+\left(\frac{1}{\rho''}+\frac{1}{\rho_{\prime\prime}}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{\rho^{v}}+\frac{1}{\rho_{v}}\right)\ldots\ldots;$$

et comme le nombre des rayons pris deux à deux, est égal au quart de la circonférence $=\frac{1}{2}\pi$, divisé par l'angle $d\pi$ des sections

(*) Afin de mieux fixer les idées, dans la figure 5, nous avons écrit ρ', ρ'', ρ''', etc., $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime\prime}$, $\rho_{\prime\prime\prime}$ sur les directions complémentaires des sections normales respectivement perpendiculaires.

consécutives; cette équation se réduit à

$$\int \frac{1}{\rho} = \frac{\pi}{2d\pi}\left(\frac{1}{\rho^{\prime}} + \frac{1}{\rho_{\prime}}\right);$$

d'où
$$K \mp \frac{Hd\pi}{\pi}\int \frac{1}{\rho} = K \mp \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\rho^{\prime}} + \frac{H}{\rho_{\prime}}\right).$$

Mais nous avons prouvé que le second membre de cette équation représente la somme des actions de deux sphères ayant pour rayon ρ' et $\rho_{\prime}$; tandis que le premier membre représente l'action même de la masse fluide, terminée par une surface quelconque, pour laquelle ρ' et $\rho_{\prime}$ sont les rayons de deux sections normales faites à angle droit dans la surface.

Donc, enfin, *l'action du fluide terminé par une surface quelconque, est sur un point donné de la normale à cette surface, égale à la demi-somme des actions de deux sphères, ayant respectivement pour centre et pour rayon, le centre et le rayon osculateur de deux sections normales faites à angle droit sur la surface du fluide (et faites par le point donné).*

Mais les deux directions de plus grande et de moindre courbure sont toujours à angle droit : si donc nous concevons les deux sphères ayant pour centres les deux centres de courbure de la surface, et pour rayons les deux rayons osculateurs, la moitié de leur action totale sur un point de la normale, sera précisément égale à l'action de la surface quelconque du fluide (*).

Après avoir déterminé l'action du fluide sur ses propres molécules; il faut déterminer la figure même de la surface qui le termine, et cette recherche est encore plus délicate que les précédentes.

Lorsqu'un fluide animé par des forces quelconques est en équi-

(*) Quand nous parlons de l'action d'une surface, il s'agit toujours de l'action d'une masse fluide terminée par cette surface.

IIme MÉMOIRE. libre, si l'on conçoit un canal dont les deux extrémités aboutissent à la surface de ce fluide, il faudra que la partie du fluide contenue dans ce canal ou syphon, soit d'elle-même en équilibre en vertu des forces qui agissent sur lui. Si donc la surface du fluide est AOB, fig. 6, il faudra que la partie du fluide contenue dans le canal quelconque NSO soit d'elle-même en équilibre.

Or je vois d'une part, au point O (en nommant ρ' et $\rho_,$ les deux rayons de courbure de la surface pour ce point), que les forces qui agissent sur le canal sont en somme

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_,}\right),$$

tandis qu'au point M (R' et $R_,$ étant, pour ce point, les rayons de courbure de la surface du fluide) je vois les forces

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_,}\right)$$

plus le poids gz d'une colonne d'eau dont la hauteur $OM = z$ différence de la hauteur du fluide dans les deux branches du canal. J'ai donc enfin pour l'équilibre du fluide de ce canal,

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_,}\right) + gz = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_,}\right).$$

Mais la théorie de la courbure des surfaces nous a fait connaître (art. V) la valeur générale de la somme $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_,}$ des valeurs inverses des rayons de courbure, et elle est

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (Voyez la note V) :}$$

donc enfin,

$$(a)\ldots\ \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2gz}{H} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_,}.$$

Telle est l'équation générale aux différentielles partielles du second ordre, qui appartient à la surface du fluide.

Cette équation une fois intégrée, présentera deux fonctions arbitraires qu'on déterminera, 1°. par l'équation des parois du tube; 2°. par l'inclinaison des plans tangents à la surface du fluide aux points limites où elle aboutit aux parois. Or, par une considération très-fine, on fait voir que cette inclinaison doit être la même pour tous ces plans tangents.

Si l'on observe, en effet, que l'action capillaire n'est sensible qu'à des distances insensibles; chaque élément de la paroi du tube, dont l'attraction détermine la convexité ou la concavité du fluide, n'ayant qu'une étendue extrêmement petite, pourra toujours être confondu avec son plan tangent; la courbure du tube ne produira donc aucun effet sur la concavité ou la convexité du fluide au contact de la paroi. Donc l'inclinaison de cette concavité ou de cette convexité sera constante dans toute l'étendue du contact de la paroi du tube et de la surface du fluide.

Revenons à l'équation générale (a) de cette surface; si l'on suppose qu'elle appartient à une surface de révolution, ce qui a lieu quand le tube est aussi de révolution, cette hypothèse donnera entre p, q, r, s, t une nouvelle relation, ce qui particularisera la surface que l'on considère.

L'analyse intégrale par laquelle on arrive enfin à l'équation de cette surface, est trop savante et trop compliquée pour que nous puissions en retracer la marche, qui d'ailleurs n'a rien de commun avec notre objet: nous nous contenterons d'indiquer, par des considérations géométriques, ce que les calculs démontrent rigoureusement.

Rappelons-nous cette propriété que nous venons d'énoncer et de démontrer: La surface fluide vient partout rencontrer, sous un même angle, les parois du tube qui la termine. Si donc on admet avec Laplace, que cette surface est à très-peu près sphérique, nous verrons que les ménisques MIOKN, fig. 2 et 3, sont

semblables dans les tubes de diamètres différents, mais d'ailleurs homogènes, et plongés dans le même fluide; c'est-à-dire que leur diamètre IK est dans un rapport constant avec le rayon de la sphère MON; or l'action du ménisque sphérique MIOKN pour soulever la colonne OZ, est réciproque à la grandeur de ce rayon, tandis que l'élévation OL due à cette action, lui est évidemment proportionnelle: donc la même élévation est réciproquement proportionnelle au diamètre IK du ménisque ou du tube.

Et les mêmes raisonnements s'appliquant également au cas où le fluide est déprimé au lieu d'être élevé par l'action capillaire, il faut lui appliquer aussi la même conséquence, et dire que la hauteur de la dépression est réciproquement proportionnelle au diamètre du tube.

Lorsqu'on a deux tubes cylindriques enchâssés l'un dans l'autre, de manière qu'ils aient le même axe, la surface du fluide est un anneau de révolution; or, il est évident que, des deux sphères tangentes qui osculent ses lignes de courbure en chacun des points les plus bas, l'une est la petite sphère génératrice de l'anneau même, l'autre est un plan qui touche l'anneau suivant tout un cercle horizontal; c'est donc une sphère dont le rayon est *infini*.

Mais l'action d'une sphère étant réciproque à son rayon, quand ce rayon est infini, cette action s'évanouit. Donc, dans ce cas remarquable, la moitié de l'effet d'une seule sphère représente la demi-somme de l'effet des deux sphères, égal à celui de la surface fluide; donc ce dernier n'est ici que la moitié de celui qui aurait lieu dans un tube ayant pour diamètre la distance constante des cylindres.

Donc aussi, quand la distance constante de deux cylindres enchâssés l'un dans l'autre, est égale au rayon d'un tube capillaire unique (tous ces tubes étant de même nature et plongés dans le même fluide), la hauteur du fluide sera la même dans l'un et l'autre cas.

Mais si le diamètre des tubes enchâssés l'un dans l'autre devient infini, ces deux tubes représentent deux plans parallèles; et les mêmes résultats ayant encore lieu, il en faudra conclure ce théorème général, comme le précédent, confirmé par l'expérience.

Lorsqu'on plonge dans un fluide deux plans situés à distance capillaire, et parallèles, le fluide s'élève ou s'abaisse entr'eux de la même quantité qu'il ferait dans un cylindre de même matière que les plans, et dont le rayon serait égal à leur distance.

Si les deux plans n'étaient pas parallèles, la surface engendrée par le fluide serait une espèce de corne de vache, qui pourrait être engendrée à très-peu près par le mouvement d'une petite sphère variable de rayon; les lignes de plus grande courbure seraient partout des cercles presqu'égaux aux grands cercles de cette sphère, tandis que les lignes de moindre courbure seraient osculées par des sphères d'un rayon incomparablement plus grand; on pourrait donc négliger l'effet de ces dernières sphères (*). Mais la grandeur du rayon de la première sphère est partout proportionnelle à l'écartement des deux plans, puisque toute la surface fluide devant rencontrer partout ces deux plans sous le même angle, il faut aussi que les sphères génératrices la coupent sous ce même angle: on verra donc encore ici que les hauteurs du fluide (élévation ou dépression) sont réciproquement entr'elles comme les écartements successifs des deux plans : résultat également indiqué par l'expérience.

Nous avons essayé de soumettre à la géométrie, le cas où les axes des deux cylindres ne seraient plus dirigés suivant une même droite, mais seraient simplement parallèles; et nous croyons y être parvenus en employant pour cela des considérations parti-

(*) Du moins entre certaines limites; car sa considération peut influer d'une manière plus sensible sur les points extrêmes.

culières à la courbure d'un genre de surfaces dont nous avons recherché, il y a long-temps (*), les propriétés. Voyez la note IV.

En considérant ensuite l'action d'une molécule fluide M placée, fig. 7, entre deux plans IP, IQ très-rapprochés, et le touchant suivant une horizontale IH; malgré sa pesanteur, sa molécule peut remonter vers cette intersection IH, parce qu'en se rapprochant de cette intersection, elle trouve un plus grand nombre de points de contact avec les plans qui l'attirent; or, l'inclinaison absolue et réciproque de ces plans, la forme de la courbure de la molécule, et sa distance à l'intersection IH, sont des grandeurs nécessairement liées entr'elles par les lois de l'action capillaire.

Ajoutons encore ici que les expériences les plus soignées concordent avec les résultats de la science.

Il est beau de voir ainsi la théorie ramener à des lois constantes, des effets nombreux et variés, saisir par la force de notre pensée, des formes qui échappent à nos sens, les déterminer d'une manière rigoureuse, et s'élever, par un enchaînement de vérités mathématiques, à tous les résultats habilement manifestés par le physicien qui fait parler les phénomènes. Telle doit être la véritable physique; telle, peut-être, par les efforts successifs des plus habiles géomètres, la verrons-nous quelque jour ainsi perfectionnée dans toutes ses branches principales. Alors les hommes, même étrangers à la science, apprendront qu'elle a partout des bienfaits à répandre, et qu'elle n'a de spéculations oiseuses qu'entre les mains stériles qui ne savent rien utiliser. Maintenant hâtons-nous de revenir à la théorie de la courbure des surfaces que nous avons peut-être trop long-temps abandonnée, pour en montrer l'avantage et l'esprit par un exemple remarquable.

(*) Dans un Mémoire que j'avais composé étant élève à l'École Polytechnique, et qui fut jugé digne d'être inséré dans ses Journaux: il s'agissait généralement des sphères tangentes à plusieurs autres, et des surfaces enveloppes de ces sphères tangentes,



ARTICLE VII.

Discussion des formes de la courbure des surfaces par la considération des sections conjuguées.

Après avoir déterminé la valeur absolue des divers éléments de la courbure des surfaces, et les propriétés générales qui lient entre eux les mêmes éléments, servons-nous de ces valeurs et de ces propriétés pour discuter les formes que la courbure des surfaces est susceptible de nous offrir.

Revenons donc aux équations fondamentales que nous avons posées. Nous avons vu que les systèmes de tangentes conjuguées sont déterminés sur le plan tangent par l'équation de leur projection sur le plan des x, y,

$$(A)\ldots\quad r + s\,(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = 0,$$

et que

$$(B)\ldots\quad 1 + p^2 + pq\,(\varphi + \psi) + (1 + q^2)\,\varphi\psi = 0$$

particularise le système des tangentes conjuguées orthogonales; de sorte que le système des équations (A) et (B), appartient aux lignes de courbure de la surface, et les détermine complettement.

De plus, la valeur générale du rayon de la section normale faite suivant la direction $\psi = \frac{dy}{dx}$ est, en représentant toujours $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ par α,

$$(\rho)\ldots\quad \rho = -\alpha \cdot \frac{1 + p^2 + 2pq\psi + (1 + q^2)\,\psi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2},$$

tandis que

$$(P)\ldots\quad P = -\alpha \cdot \frac{1 + p^2 + 2pq\varphi + (1 + q^2)\,\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$$

est la valeur du rayon de la section normale faite suivant la direction φ conjuguée à ψ.

IIme MÉMOIRE. Enfin, lorsque des valeurs générales (ρ) et (P), on passe à la valeur des rayons de courbure de la surface même, ces expressions se simplifient et deviennent

$$[\rho]\ldots \qquad \rho = -a.\frac{pq + (1+q^2)\psi}{s + t\psi}$$

et

$$[P]\ldots \qquad P = -a.\frac{pq + (1+q^2)\varphi}{s + t\varphi}$$

En considérant la forme des surfaces, *à partir* d'un quelconque de leurs points, et par rapport au plan tangent en ce point ; ou tous les autres points de la surface seront placés d'un même côté du plan tangent, ou bien partie sera d'un côté, partie de l'autre côté : cela est évident.

Ainsi donc, la principale différence qui se trouve entre les formes qu'affecte la courbure des surfaces, est celle qu'elles offrent dans les deux cas suivans ; ils embrassent ensemble toutes les espèces de surfaces, et elles sont nécessairement comprises dans l'un ou l'autre des genres qui correspondent à ces deux divisions.

Certaines surfaces présentent, à partir d'un même point et sous toutes les directions possibles, leur convexité dans le même sens, par rapport au plan tangent en ce point. D'autres surfaces présentent à la fois, à partir du même point, sous certaines directions, leur convexité d'un côté du plan tangent, et sous d'autres directions, leur concavité par rapport à ce même côté. Dans le premier cas, il faut que les rayons de courbure de toutes les sections normales, soient dans un même sens à partir d'un même point, et par conséquent, que les expressions analytiques de leurs valeurs, soient toutes de même signe. Dans le second cas, au contraire, une partie des rayons doit se diriger sur la normale d'un côté du plan tangent, et tous les autres rayons, changer de côté par rapport à ce plan, en prenant une direction opposée. Les expressions analytiques de leurs valeurs doivent alors

avoir un signe positif ou négatif, suivant qu'elles appartiennent à l'une ou à l'autre de ces directions.

Pour examiner avec exactitude ces diverses circonstances, il faut voir d'abord si les surfaces sont susceptibles des formes que nous leur attribuons; il faut chercher ensuite à quels caractères nous reconnaîtrons ces formes diverses : il faut enfin déterminer pour chacune d'elles, tous les éléments que présentent en chaque point les surfaces dans leur courbure.

La valeur générale du rayon (ρ) étant $-\alpha . \frac{(1+p^2)+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2}$, j'observe d'abord que le numérateur est la somme de trois quarrés

$$1, \quad \psi^2 \quad \text{et} \quad (p+q\psi)^2;$$

ainsi ce numérateur sera nécessairement positif tant que p, q et ψ seront réels, c'est-à-dire, pour tous les points de la surface et sous toutes les directions possibles représentées par ψ.

D'ailleurs la quantité $\alpha = \sqrt{(1+p^2+q^2)}$ étant indépendante de ψ, doit avoir le même signe, quelle que soit la direction représentée par cette tangente *trigonométrique*. Donc enfin, « le dénominateur $r+2s\psi+t\psi^2$ pourra seul être susceptible de faire varier le signe du rayon ρ. »

Pour connaître à partir de quelles valeurs de ψ les rayons seront positifs lorsque ψ variera dans un sens, et négatifs lorsque ψ variera en sens contraire, il faut donc supposer seulement

$$r+2s\psi+t\psi^2=0.$$

Cette équation donne immédiatement

$$\psi = \frac{-s \pm \sqrt{(s^2-rt)}}{t},$$

où la racine ψ présente deux valeurs différentes. Examinons quelles peuvent être ces racines.

Faisons $\Psi = \frac{-s+\sqrt{(s^2-rt)}}{t}$, $\Phi = \frac{-s-\sqrt{(s^2-rt)}}{t}$,

et voyons si Ψ et Φ satisfont à l'équation (A) des tangentes conjuguées. Il faudra pour cela que l'on ait

$$r - s\left(\frac{s+\sqrt{(s^2-rt)}}{t} + \frac{s-\sqrt{(s^2-rt)}}{t}\right) + t\left(\frac{s+\sqrt{(s^2-rt)}}{t} \cdot \frac{s-\sqrt{(s^2-rt)}}{t}\right) = 0,$$

ou que

$$r - \frac{2s^2}{t} + \frac{rt}{t} = 0, \quad \text{c'est-à-dire}, \quad rt - s^2 = 0,$$

ce qui exigerait que les deux tangentes conjuguées Ψ et Φ fussent identiques. Nous examinerons ce cas en particulier.

Si la grandeur $s^2 - rt$ est positive, les valeurs que nous venons de trouver pour Ψ et Φ seront réelles, et par conséquent ρ pourra, pour le même point de la surface, avoir des valeurs positives et des valeurs négatives. Voyons à quelles sections appartiennent alors les rayons de même signe ou de signes différents. Considérons pour cela deux rayons de sections conjuguées quelconques.

Nous avons vu, art III de ce §, que

$$r + 2s\psi + t\psi^2 = + (\psi - \varphi)(s + t\psi),$$
$$r + 2s\varphi + t\varphi^2 = - (\psi - \varphi)(s + t\varphi)$$

et

$$rt - s^2 = - (s + t\psi)(s + t\varphi);$$

donc

$$\frac{r + 2s\psi + t\psi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2} = - \frac{s + t\psi}{s + t\varphi} = \frac{rt - s^2}{(s + t\varphi)^2}.$$

Mais le quarré $(s + t\varphi)^2$ étant nécessairement positif, il est évident que les deux dénominateurs de ρ et P seront de même signe ou de signes différents, suivant que $rt - s^2$ sera positif ou négatif; donc, enfin, *si partant de la direction Ψ, on donne à ψ toutes les valeurs possibles jusqu'à Φ, φ prendra toutes les valeurs possibles de l'angle supplément du premier (compris entre les directions Ψ et Φ); et alors, toutes les premières valeurs, celles de ρ, seront de même signe entr'elles; toutes les secondes,*

celles de P*, appartenant aux sections conjuguées des premières, seront pareillement de même signe entr'elles : enfin, ces valeurs de* ρ *et* P *seront toutes ensemble de même signe, ou toutes celles de* P *d'un signe différent de celles de* ρ*, suivant que* $rt - s^2$ *sera positif ou négatif; et cette propriété générale des tangentes conjuguées les différentie de tous les autres systêmes de tangentes.*

Nous avons dit que les lignes de plus grande et de moindre courbure sont tangentes aux sections normales conjuguées rectangulaires ; donc « les rayons de courbure de la surface seront aussi de même signe ou de signe différent, suivant que $rt - s^2$ sera positif ou négatif. » Ainsi, la courbure des surfaces sera uniforme, et, considérée sous toutes les directions possibles, elle se présentera dans un seul et même sens, dès que les deux rayons de courbure de la surface, seulement, seront dirigés du même côté du plan tangent. Lorsqu'au contraire les deux rayons de courbure seront dirigés en sens opposés, partie des rayons des sections normales seront dans un sens, tous les rayons des sections conjuguées à celles-là seront dans l'autre sens ; et, considérant les surfaces comme susceptibles d'avoir à la fois deux courbures différentes et bien distinctes, nous dirons dans le premier de ces cas, que les deux courbures de la surface sont dans le même sens, nous dirons dans le second, qu'elles sont en sens contraires.

Observons en passant, que c'est parce que les rayons des deux courbures principales peuvent servir à indiquer ainsi la forme des surfaces, qu'on s'est contenté de les présenter seuls, comme les éléments de cette forme ; mais on voit en même temps que sa connaissance parfaite ne peut être donnée que par la considération simultanée des rayons de toutes les sections conjuguées.

ARTICLE VIII.

Des ombilics : conditions pour que tous les rayons des sections normales soient égaux au même point.

Si l'équation (B), qui détermine les valeurs de φ et ψ appartenant au *maximum* et au *minimum* de courbure de la surface; si, dis-je, (B) était satisfaite d'elle-même dès que φ et ψ sont supposés appartenir à des tangentes conjuguées, alors chacun des rayons des sections normales devant être un *maximum* ou un *minimum* par rapport à tous les autres, pour que cette condition n'exprimât rien d'absurde, il faudrait que tous les rayons fussent égaux entr'eux. Supposons donc identiques l'équation (B) et celle (A) des tangentes conjuguées. Il faudra que

$$\frac{1+p^2}{pq}=\frac{r}{s},\ \frac{1+p^2}{1+q^2}=\frac{r}{t},\ \frac{pq}{1+q^2}=\frac{s}{t},\quad \text{ou que}\quad \frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

ce qui réduit simplement à deux ces trois équations de condition: telles sont les équations qui doivent avoir lieu pour que la surface puisse, au point que l'on considère, être osculée par une sphère; et l'on voit qu'en ce point la direction des lignes de courbure devient indéterminée et susceptible d'une infinité de valeurs différentes. C'est aussi ce que nous enseigne l'équation même des lignes de courbure: rappelons-nous, en effet, que nous l'avons mise sous la forme

$$(C')\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{pq}{s}-\frac{1+q^2}{t}\right)st+\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+p^2}{r}-\frac{1+q^2}{t}\right)rt+\left(\frac{1+p^2}{r}-\frac{pq}{s}\right)rs=0,$$

équation où il est évident qu'en supposant

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

ce qui est le cas que nous considérons, tous les coefficients s'évanouissent, et $\frac{dy}{dx}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, qui lui permet de satisfaire à une infinité de valeurs, au lieu de deux seulement.

Ces points, très-remarquables sur les surfaces, ont reçu la dénomination d'*ombilics*, qui convient parfaitement à la forme qu'affectent autour d'eux, et la courbure de la surface, et la direction de ses lignes de courbure. L'ellipsoïde de révolution nous présente en chacun de ses sommets un de ces points ombilics. Nous savons, en effet, que les surfaces de révolution ont toutes pour méridien les lignes d'une de leurs courbures; nous voyons toutes ces lignes méridiennes se croiser à la fois aux deux sommets de la surface; et il est évident qu'en chacun de ces sommets, la surface est susceptible d'être osculée dans tous les sens par une sphère.

Il est sur les surfaces un autre genre d'ombilics non moins remarquable; toutes les lignes de courbure ne viennent pas, comme dans l'exemple précédent, se croiser en chacun d'eux, et au lieu de deux lignes (une de chaque courbure) qui passent par chaque point de la surface, on n'en remarque plus qu'une seule (*) qui passe par ces ombilics particuliers. L'ellipsoïde et l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes, nous offriront de semblables ombilics: ils présentent un caractère analytique et géométrique qui les distingue tout-à-fait des ombilics de l'autre genre. Dans le premier cas, en effet, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est réellement $\frac{0}{0}$, comme l'indique l'équation (C'); dans le second cas, il faut recourir aux ordres supérieurs au second, pour avoir $\frac{dy}{dx}$ en fonction des coefficients différentiels partiels de la surface.

Ces deux espèces d'ombilics appartiennent l'une et l'autre aux surfaces dont les deux courbures sont dirigées dans le même sens; les surfaces dont les deux courbures se présentent en sens contraires ne sont pas susceptibles d'en avoir. Comme en effet, dans

(*) Ou plus généralement, qu'un nombre déterminé.

cette dernière classe, il faut que $rt - s^2$ soit négatif, il faudrait aussi que la valeur de cette quantité, conclue de l'identité des équations (A) et (B) pût être négative.

Mais $$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}:$$

donc $$rt = r^2 . \frac{1+p^2}{1+q^2}, \quad s^2 = r^2 \frac{p^2q^2}{(1+p^2)^2};$$

donc aussi $$rt - s^2 = r^2 \left(\frac{1+q^2}{1+p^2} - \frac{p^2q^2}{(1+p^2)^2}\right),$$

équation qui se réduit à

$$rt - s^2 = r^2 \frac{1+p^2+q^2}{(1+p^2)^2}.$$

Or, le second membre de cette équation, et par conséquent le premier, est nécessairement positif tant que p, q et r sont réels.

Ainsi les surfaces dont les courbures sont dirigées en sens contraires ne sauraient avoir d'ombilics. C'est une remarque que nous aurons lieu de faire sur l'hyperboloïde hyperbolique ou à une nappe, qui présente en *une infinité* de points, ses courbures égales mais dirigées en sens contraires, et qui d'ailleurs n'a pas un seul ombilic.

Si dans les diverses hypothèses que nous venons d'examiner, on voulait obtenir la valeur ρ du rayon de courbure de toutes les sections normales, il faudrait y supposer entre p, q, r, s et t les relations que nous venons de déterminer. Alors cette valeur

$$\rho = -\alpha . \frac{(1+p^2) + 2pq\psi + (1+q^2)\psi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2}$$

deviendrait

$$\rho = -\frac{1+p^2}{r} . \frac{r + 2s\psi' + t\psi'^2}{r + 2s\psi' + t\psi'^2} . \alpha = -\frac{1+p^2}{r} . \sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Or, cette valeur est indépendante de ψ. Cela nous fait voir que les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entr'eux.

Mais il faut pour cela que r et t soient de même signe; car

dans le cas où ces deux coefficients différentiels seraient de signe différent, $rt - s^2$ serait nécessairement négatif, et nous avons vu qu'alors les équations de condition qui viennent de faire disparaître ψ de ρ, ne sauraient plus avoir lieu pour des points réels de la surface. II

Avant de terminer cet article, il est nécessaire de répandre quelque jour sur une espèce de paradoxe. Nous avons vu que la somme des deux rayons de courbure est

$$\rho + P = -\alpha \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2},$$

et leur produit

$$\rho P = \frac{\alpha^4}{rt - s^2}.$$

Si donc les rayons ρ et P sont égaux, quatre fois leur produit doit être égal au quarré de leur somme ; et cette condition donne immédiatement

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 = 4(rt - s^2).\alpha^2.$$

Cette équation appartient donc à tous les points où les deux courbures sont égales et dirigées dans le même sens : elle suffit à leur définition complette.

Cependant nous avons vu que le système d'une double équation

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

était nécessaire pour le même cas. Comment donc la coexistence de ces deux équations ne dit-elle rien de plus particulier que l'existence d'une seule équation qui contient ces mêmes variables ?

D'abord, c'est que l'équation unique contient les variables $(1+p^2)$, (pq), $(1+q^2)$, r, s, t, élevées à un degré double de celles des autres équations : voilà la raison analytique. Ensuite, c'est que l'équation unique, mise sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}.\alpha \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}\right)^2 = \frac{\alpha^4}{rt - s^2},$$

IIme MÉMOIRE. est composée de deux membres indépendants de la position des plans coordonnés qu'on peut changer comme on voudra (pourvu qu'ils restent rectangulaires entr'eux); tandis que les équations

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s},\quad \frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}$$

n'en sont pas indépendantes, et que chacune d'elles exprime, par rapport aux axes des x ou des y séparément, les conditions pour que les rayons des sections normales puissent être égaux entr'eux; ou, ce qui revient au même, pour que les tangentes conjuguées soient constamment à angle droit (*).

Nous allons montrer maintenant que l'équation unique

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=4(rt-s^2)\alpha^2,$$

n'est que la conséquence des deux équations

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

Pour cela, nous observerons d'abord que

$$\alpha^2=1+p^2+q^2=(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2;$$

et comme par cette transformation, la première équation devient, de même que les deux autres, homogène en $1+p^2$, pq, $1+q^2$, et r, s, t, il est évident que la première équation aura lieu en même temps que les deux autres, si, en y substituant r, s, t pour $1+p^2$, pq, $1+q^2$; elle devient identique : or, elle devient alors

$$[rt-2s^2+rt]^2=4(rt-s^2)(rt-s^2),$$

équation évidente.

(*) On verra dans le Mémoire suivant que les deux équations $\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}$, $\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}$, expriment les relations des axes des x et des y avec la courbe *indicatrice*, pour que cette courbe du second degré soit un cercle; tandis que l'équation unique exprime que tous les diamètres de l'indicatrice sont égaux entr'eux, condition équivalente.

On ferait voir avec une égale facilité que la seule condition de l'égalité des rayons, exprimée par l'équation unique, nécessite dans tous les cas l'existence de la double équation. Mais il faudrait pour cela recourir à la valeur générale des rayons des sections normales qui, devenant tous égaux dès que les rayons de courbure le sont entr'eux, donnent immédiatement, par cette seule condition,

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

Nous adopterons cette méthode dans le Mémoire suivant.

ARTICLE IX.

Conditions pour qu'un rayon de courbure soit nul ou infini.

La géométrie ne nous présente pas les surfaces divisées d'une manière isolée en deux grandes familles, les unes à courbures dans le même sens, les autres à courbures en sens contraires; elle les unit par une classe particulière de surfaces qui, ne pouvant à la rigueur être considérée comme appartenant exclusivement à l'une ni à l'autre de ces familles, ne fait, à proprement parler, partie d'aucune des deux, et leur sert de limite commune.

Si donc on se représente l'espace comme figuré par des surfaces quelconques, on parcourra toutes les formes possibles de l'étendue, en donnant d'abord aux deux courbures de la surface la même direction, en agrandissant ou en diminuant de plus en plus l'une des courbures, pour la rendre infinie ou nulle; enfin, en renversant la même courbure, pour la diminuer ou l'accroître de plus en plus dans ce nouveau sens. Nous allons étudier la nature des surfaces dans cet état intermédiaire où l'une des courbures devenant soit infinie, soit nulle, n'appartient plus à aucune direction, d'un côté

IIme MÉMOIRE. ou de l'autre du plan tangent; puisque la ligne de courbure se place alors en entier sur lui.

Supposons d'abord qu'un des deux rayons de courbure doive être infini, sa valeur étant

$$[\rho]\ldots\quad \rho = -\alpha\frac{pq+(1+q^2)\psi}{s+t\psi},$$

il faudra que $s+t\psi=0$; car on ne peut faire $pq+(1+q^2)\psi$ égal à zéro, puisque p et q, ainsi que $\alpha=\sqrt{(1+p^2+q^2)}$, n'appartenant qu'au plan tangent, n'ont rien de commun avec la grandeur absolue du rayon de courbure; et cependant ψ serait ici donné en p et q seuls. Supposons donc $s+t\psi=0$. A cause de l'équation (A) des tangentes conjuguées, à laquelle ψ doit satisfaire, on a

$$r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,\quad \text{ou}\quad r+s\psi+\varphi(s+t\psi)=0,$$

qui donne par conséquent encore $r+s\psi=0$, en laissant la quantité φ indéterminée : donc

$$\psi=-\frac{r}{s}=-\frac{s}{t},\quad \text{et}\quad rt-s^2=0.$$

C'est l'équation de condition qui doit lier les coefficients du second ordre r, s, t, pour que la surface ait une de ses courbures nulle. Dans ce cas, la ligne de courbure est osculée par une droite, et la surface générale, par une surface développable dont cette droite est une arête.

Si, toujours dans la même hypothèse, nous considérons la valeur générale des rayons des sections normales

$$\rho=-\alpha\frac{(1+p^2)+2pq\psi+(1+q^2)\psi^2}{r+2s\psi+t\psi^2},$$

nous verrons que la valeur ψ, qui rend infini le rayon $[\rho]$ de courbure de la surface, rend aussi infinis tous les rayons ρ. En effet, les équations de condition $r+s\psi=0$, $(s+t\psi)\psi=0$, ajoutées membre à membre, donnent $r+2s\psi+t\psi^2=0$ (la seconde étant

multipliée par ψ). Mais φ n'entrant pas dans ces équations, reste toujours indéterminé : de là résulte ce théorême général: *Lorsqu'un des rayons de courbure de la surface est infini, ce seul rayon est celui d'une section unique conjuguée à toutes les autres sections normales.* Ainsi toutes les droites qu'on peut mener alors, à partir du point de contact, sur le plan tangent, sont conjuguées à la droite unique qui, au point de tangence, présente avec la surface un contact du second ordre; et déjà nous entrevoyons toutes les propriétés des surfaces développables. IIme MÉMOIRE.

Dans le cas où l'on voudrait que les deux rayons de courbure fussent à la fois infinis, on aurait aussi pour le second $r+s\varphi=0$, $s+t\varphi=0$. Comme ces conditions ne donneraient pour φ que la valeur trouvée tout à l'heure pour ψ, si l'on voulait y satisfaire au moyen de φ, nous n'aurions pas atteint notre but; car on pourrait toujours satisfaire à l'équation

$$(A)\ldots r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,$$

en mettant au lieu de φ, non la valeur unique de ψ, mais une autre valeur *quelconque* (π). Il faudra donc que les équations

$$r+s\varphi=0,\ r+s\psi=0,\ s+t\varphi=0,\ s+t\psi=0$$

aient lieu indépendamment de φ et de ψ, ce qui exigera qu'on ait

$$r=0,\ s=0,\ t=0.$$

Or ce sont les équations différentielles partielles du plan, pour le second ordre; donc alors la surface est osculée par un plan, et les directions φ et ψ des tangentes conjuguées deviennent absolument indéterminées. Ce point est un véritable ombilic, puisque les deux rayons de courbure devenant infinis sont égaux entr'eux.

Si nous supposons, au contraire, que le rayon ρ devient nul, il faudra que $s+t\psi$ devienne infinie ou $r+s\psi$, et comme ce ne peut être ψ qui le devienne, en général; il faudra que r, s ou t, séparément ou ensemble, le soient. Ce cas appartient à la discussion

 des valeurs singulières que peuvent prendre les coefficients différentiels : leur examen est facile ; mais il ne doit pas nous occuper actuellement. Sans analyser cette dernière hypothèse, nous nous contenterons de dire qu'elle a lieu lorsqu'un des centres de courbure vient se placer sur la surface, ce qui exige que ce point soit singulier, ou sur la surface primitive, ou sur celle de ses centres de courbure. Enfin cette supposition d'un rayon de courbure nul, n'influe en rien sur la valeur de l'autre rayon, qui peut être zéro, fini ou infini, selon que le dénominateur de l'autre rayon sera infini, limité ou nul. Dans tous les cas, l'une des lignes de courbure sera osculée par un point, qui sera le point même que l'on considère, et la surface sera complettement osculée par une ligne courbe : ce sera la ligne de courbure dont la courbure n'est pas nulle au point singulier.

ARTICLE X.

Emploi des équations symétriques par rapport aux deux rayons de courbure, dans la discussion des formes des surfaces.

Nous venons de parcourir successivement les principales variétés que présentent les formes des surfaces. Pour mettre de l'uniformité dans la marche que nous avons suivie, nous sommes constamment partis de l'équation qui nous donne la valeur du rayon d'une section normale quelconque, et nous avons, dans tous les cas, passé d'une même manière, des sections conjuguées aux directions de plus grande et de moindre courbure, par le moyen des équations (A) et (B) de ces directions.

On aurait pu parvenir plus rapidement aux mêmes résultats, si l'on eût considéré en outre l'équation [I], art. III de ce paragraphe, qui fait connaître la somme des rayons des sections normales conjuguées, et celle [II], qui donne de plus le produit des deux rayons

de courbure. Ces deux équations sont :

$$[\text{I}]\dots\quad \rho + \text{P} = -\alpha.\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}$$

$$[\text{II}]\dots\quad \rho\text{P} = \frac{\alpha^4}{rt - s^2}.$$

Alors nous eussions vu immédiatement que les rayons de sections conjuguées, et par conséquent aussi ceux de courbure de la surface, devant être de même signe ou de signe différent, suivant que leur produit est positif ou négatif, les deux courbures d'une surface sont en un quelconque de ses points, dirigées dans le même sens ou en sens contraires, suivant que $rt - s^2$ est positif ou négatif, puisque $\alpha^4 = (1 + p^2 + q^2)^2$ est nécessairement toujours positif.

En supposant que les rayons de courbure sont égaux, si ρ et P sont dirigés dans le même sens

$$\rho + \text{P} = 2\rho, \quad \rho\text{P} = \rho^2 \quad \text{et} \quad (\rho + \text{P})^2 = 4\rho\text{P};$$

alors les équations (I) et (II) donnent immédiatement l'équation obtenue pour ce cas, art. VII,

$$4(1 + p^2 + q^2)(rt - s)^2 = [(1 + q)^2 r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2;$$

mais cette équation considérée dans toute sa généralité, n'appartient qu'à une ligne unique et non plus à une surface : sans cela, elle rendrait imaginaires les valeurs de l'équation (B).

Si les deux rayons ρ et P sont égaux, mais dirigés en sens contraires, leur somme est nulle : on a donc immédiatement

$$(1 + p^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

C'est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que les deux courbures d'une surface soient égales et en sens contraires. Cette dernière condition étant donnée d'ailleurs par $rt - s^2$ négatif (pour que le produit ρP soit aussi constamment négatif). On parcourrait ainsi les différents cas des deux principales classes de surfaces.

En supposant un des rayons de courbure infini, la somme des rayons de courbure doit pareillement le devenir ; par conséquent,

aussi, les sommes respectives des rayons conjugués; cette condition fournirait de suite l'équation $rt - s^2 = 0$, nécessaire pour qu'un des rayons de courbure soit infini, et nous verrions par là que dès qu'un rayon de courbure de la surface est infini, un des rayons de chaque système de sections normales conjuguées doit l'être également.

La marche que nous venons d'indiquer a l'avantage d'être en général plus rapide que la précédente; mais elle n'éclaire pas autant sur la figure propre de la surface. On voit bien, en suivant cette méthode, comment les lignes de courbure se dirigent pour diminuer ou augmenter successivement dans tous les rapports possibles, la grandeur de leur courbure. Mais on perd entièrement de vue le reste de la surface et les transformations qu'elle éprouve par la variation de ses lignes de courbure. Dans le Mémoire suivant, nous présenterons un dernier genre de considérations qui semble réunir les avantages de ces deux-ci, sans avoir leurs inconvénients. Il présente dans chaque cas, d'une manière simple et rapide, le tableau complet de tous les éléments dont se compose, en chaque point, la courbure des surfaces.

FIN DU SECOND MÉMOIRE.

NOTES PRINCIPALES

DU SECOND MÉMOIRE.

[Nous avons cru devoir mettre dans l'article VIII du troisième Mémoire la note relative aux rayons de courbure des surfaces du second degré, indiquée comme devant être ici (page 34, premier Mémoire)].

NOTE PREMIÈRE.

Démonstration des théorêmes des articles II, III du § premier, par la méthode des Fonctions Analytiques.

En rejetant toute considération infinitésimale, nous allons démontrer d'abord que si le point $\bar{x}, \bar{y}$ est commun aux quatre courbes

$$y = o(x), \quad y = O(X), \quad y = \omega(\xi), \quad y = \Omega(\Xi),$$

telles que pour une même ordonnée y quelconque, on ait toujours

$$x - X = \xi - \Xi;$$

en supposant qu'au point $\bar{x}, \bar{y}$, on ait

$$\omega'(\bar{x}) = \Omega'(\bar{x}), \quad \omega''(\bar{x}) = \Omega''(\bar{x}) \ldots \omega^{(\mu-2)}(\bar{x}) = \Omega^{(\mu-2)}(\bar{x});$$

et enfin

$$o'(\bar{x}) = O'(\bar{x}) = 0,$$

on aura généralement

$$o'(\bar{x}) = O'(\bar{x}), \quad o''(\bar{x}) = O''(\bar{x}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots o^{\mu}(\bar{x}) = O^{\mu}(\bar{x});$$

IIme MÉMOIRE. c'est-à-dire, que *les deux courbes ω et Ω ayant entr'elles un contact de l'ordre $\mu - 2$, au point $\bar{x}, \bar{y}$, au même point les deux courbes* o *et* O *en auront un de l'ordre μ.*

En effet, $\bar{x}$, $\bar{y}$ étant les coordonnées d'un point commun aux quatre courbes, nous pourrons, en faisant $y = \bar{y} + k$, faire aussi

$$x = \bar{x} + i, \quad X = \bar{x} + I, \quad \xi = \bar{x} + v, \quad \Xi = \bar{x} + \Upsilon.$$

Si donc, à l'aide de ces valeurs, on développe les équations des quatre courbes, en représentant simplement par o', o'',.... O', O'',...., etc., les valeurs $o'(\bar{x})$, $o''(\bar{x})$,...., $O'(\bar{x})$, $O''(\bar{x})$...., etc.; et d'ailleurs, en observant que par hypothèse,

$$o'(\bar{x}) = O'(\bar{x}) = o,$$

on aura

$$(o)\ldots\ldots \quad k = \quad + \frac{o''}{1.2}.i^2 + \frac{o'''}{1.2.3}.i^3 + \text{etc.},$$

$$(O)\ldots\ldots \quad k = \quad + \frac{O''}{1.2}.I^2 + \frac{O'''}{1.2.3}.I^3 + \text{etc.},$$

$$(\omega)\ldots\ldots \quad k = \frac{\omega'}{1}.v + \frac{\omega''}{1.2}.v^2 + \frac{\omega'''}{1.2.3}.v^3 + \text{etc.},$$

$$(\Omega)\ldots\ldots \quad k = \frac{\Omega'}{1}.\Upsilon + \frac{\Omega''}{1.2}.\Upsilon^2 + \frac{\Omega'''}{1.2.3}.\Upsilon^3 + \text{etc.}$$

Si de ces quatre développements je tire pour le cas où k, i, I, v, Υ sont nuls, c'est-à-dire, pour le point $\bar{x}, \bar{y}$, la valeur des rapports

$$\frac{v}{k}, \quad \frac{\Upsilon}{k}; \quad \frac{i^2}{k}, \quad \frac{I^2}{k},$$

j'ai de suite

$$\frac{1}{\omega'}, \quad \frac{1}{\Omega'}; \quad \frac{1.2}{o''}, \quad \frac{1.2}{O''}.$$

Mais nous avons aussi, par hypothèse,

$$x - X = \xi - \Xi;$$

ou, en retranchant $\bar{x}$ de chacune de ces abscisses,

$$i - I = v - \Upsilon,$$

équation identique avec celle-ci,

$$\frac{i^2 - I^2}{k} = \frac{v - \Upsilon}{k}(i + I).$$

Nous aurons donc

$$\frac{2}{o''}-\frac{2}{O''}=\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\Omega'}\right)(i+I),$$

lorsque i et I seront nuls. Donc alors, à moins que ω' ou Ω' ne soient nuls aussi (hypothèse que nous avons exclue), il faut qu'on ait au point $\overline{x}$, $\overline{y}$,

$$o''=O''.$$

Ainsi, *quelles que soient les valeurs finies de* ω' *et* Ω', *les deux courbes* (o) *et* (O) *ont en* $\overline{x}$, $\overline{y}$ *un contact du second degré.* J'observe en passant que $\frac{1}{o''}$, $\frac{1}{O''}$ sont les rayons osculateurs de ces deux courbes au point $\overline{x}$, $\overline{y}$.

Supposons maintenant qu'on ait en général,

$$\omega'=\Omega',\quad \omega''=\Omega''\quad \text{jusqu'à}\quad \omega^{(\mu-2)}=\Omega^{(\mu-2)}\ \text{inclusivement.}$$

L'équation

$$\frac{2}{o''}-\frac{2}{O''}=\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\Omega'}\right)(i+I),$$

mise sous la forme

$$\frac{o''-O''}{\omega'-\Omega'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{o''O''}{\omega'\Omega'}(i+I),$$

va devenir $\frac{0}{0}$ pour son premier membre.

Mais d'après la théorie connue de ces sortes de cas, $\omega^{(\mu-2)}-\Omega^{(\mu-2)}$ étant la dernière fonction dérivée de $\omega'-\Omega'$ qui soit nulle, la valeur de la fonction

$$\frac{o''-O''}{\omega'-\Omega'}\quad \text{est}\quad \frac{o^{(\mu)}-O^{(\mu)}}{\omega^{(\mu-1)}-\Omega^{(\mu-1)}};$$

mais cette valeur est aussi

$$\frac{1}{2}\,\frac{o''O''}{\omega'\Omega'}\times(i+I),$$

(lorsque $i=0$, $I=0$). Si donc o'', O'' ne sont pas infinis, ce qui est le cas général; et d'ailleurs ω', Ω' n'étant pas nuls, ce qui est toujours notre hypothèse,

$$\frac{1}{2}\,\frac{o''O''}{\omega'\Omega'}\times\text{zéro}=0.$$

Donc, enfin, au point $\overline{x}$, $\overline{y}$,

$$\frac{o^{(\mu)}-O^{(\mu)}}{\omega^{(\mu-1)}-\Omega^{(\mu-1)}}=0,$$

IIme MÉMOIRE. ce qui exige que

$$o^{(\mu)} = O^{(\mu)}.$$

Mais, à plus forte raison, faut-il que

$$o' = O', \quad o'' = O'' \ldots\ldots \; o^{(\mu-1)} = O^{(\mu-1)}.$$

Donc, enfin, les deux courbes

$$y = o\,(x), \quad y = O\,(X)$$

ont entr'elles un contact de l'ordre μ, lorsqu'au même point les autres courbes

$$y = \omega\,(\xi), \quad y = \Omega\,(\Xi)$$

en ont un de l'ordre $\mu - 2$.

En suivant une marche absolument pareille, on parviendrait à des résultats semblables pour les surfaces dont la forme éprouve les transformations énoncées dans les articles II, III et IV, § Ier, où nous avons suivi la méthode des infiniment petits.

NOTE II.

Détermination graphique des rayons osculateurs des sections normales quelconques, d'après la connaissance des rayons de courbure de la surface.

Dans l'article V du second paragraphe, nous avons vu qu'en représentant par ρ' et $\rho_{,}$ les deux rayons de courbure en un même point, et par ρ le rayon de la section normale qui, avec les sections principales correspondantes à ces rayons, fait des angles égaux à α, $100° - \alpha$, ρ est donné en ρ' et $\rho_{,}$ par l'équation

$$\rho = \frac{2\rho'\rho_{,}}{(\rho' + \rho_{,}) - (\rho' - \rho_{,}) \cos 2\alpha}.$$

Or, si l'on prend, fig. 10, sur la droite APB, PA $= \rho'$, PB $= \rho_{,}$; l'angle APM $= 2\alpha$ et PM $= \rho$, la suite des points M ainsi déterminés pour toutes les valeurs possibles de α, forme une courbe du second degré ayant AB pour grand axe et P pour foyer.

En effet, soient a et b le grand et le petit axe d'une courbe du second degré, telle que

$$\rho' + \rho_{,} = 2a, \quad \rho' - \rho_{,} = 2c, \quad 2\sqrt{(a^2 - b^2)} = 2c \ldots$$

c étant l'excentricité. Ces valeurs donnent immédiatement

$$\rho' = a + \sqrt{(a^2 - b^2)}, \quad \rho_{,} = a - \sqrt{(a^2 - b^2}, \quad \rho\rho' = b^2.$$

Par conséquent, la valeur de ρ en ρ' et $\rho_{,}$ va prendre cette nouvelle forme

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos 2\alpha};$$

c'est l'équation polaire des courbes du second degré, et cette équation (*) appartiendra à l'ellipse ou à l'hyperbole, suivant qu'on prendra les rayons ρ' et $\rho_{,}$ dans le même sens ou en sens opposés pour produire les deux sommets A, B; alors le signe de $c \cos 2\alpha$ changerait, le signe $-$ ayant lieu pour l'ellipse, le signe $+$ pour l'hyperbole.

Si l'on faisait $\rho_{,} = \frac{1}{0}$, ce qui a lieu pour la parabole, l'équation ρ se réduirait à

$$\rho = \frac{2\rho'}{1 + \cos 2\alpha}.$$

L'angle α est celui que forme la section normale quelconque dont ρ est le rayon, avec la section principale dont ρ' est le rayon. Donc cet angle connu, le rayon ρ le sera pareillement.

NOTE III.

De l'action capillaire exercée par un fluide sur une colonne perpendiculaire à la surface, quand cette surface est une sphère concave ou convexe.

Soient deux sphères égales MON, POQ, tangentes en O, tout étant rempli de fluide autour du point O, excepté la sphère MON; l'action du fluide inférieur au plan tangent horizontal IOK sera la constante K, et cette action tend évidemment à faire descendre le point O ou la colonne OS.

Au contraire, tout point q' au-dessus de ce plan, agit pour élever O ou OS. Donc, 1°. quand la surface du fluide est une sphère concave (MON), c'est la différence $K - \frac{H}{\rho}$ qui exprime la valeur entière du fluide.

(*) On peut voir, en effet, dans l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, par Lacroix, que ces expressions sont identiques avec celles qu'il a données pour les équations polaires de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Seulement il s'est servi de lettres différentes; il désigne ρ par z et 2α par φ. Nous citons avec d'autant plus de plaisir cet ouvrage d'un savant si recommandable, que ce même ouvrage a fait époque dans l'enseignement de la géométrie analytique. Il faut le mettre au petit nombre des écrits qui ont simplifié les élémens, en accroissant leurs domaines.

IIme MÉMOIRE. Mais si le fluide est terminé par la sphère convexe POQ, il faudra retrancher l'effet du ménisque PIOKQ de celui de la partie plane.

Or l'effet des ménisques MIOKN, PIOKQ est le même sur la colonne OS. Car le point q du second, en faisant $rq = Oq$, attire autant en bas qu'en haut la portion Or. Cette force n'a donc aucun effet sur l'élévation ou la dépression.

Si donc à chaque ligne rq on mène par le point O une parallèle $Oq' = rq$, le point q' du ménisque supérieur agira sur la colonne OS, comme q sur r. Ainsi les deux ménisques agissent avec la même énergie : seulement l'action de l'un doit être ajoutée quand l'action de l'autre est retranchée. Donc, 2°. l'action totale exercée par le fluide terminé par une sphère convexe, est $K + \frac{H}{\rho}$.

NOTE IV.

De l'action capillaire exercée, premièrement, entre deux cylindres enchâssés l'un dans l'autre, leurs axes étant différents, mais parallèles; secondement, entre deux sphères excentriques.

Soient $AA'B'B_{\prime}$, $aa'b'b_{\prime}$, fig. 9, deux cylindres verticaux ayant pour bases les cercles ADA'_{1}, ada'_{1}, dont la plus grande distance $a'A'$ soit cependant assez petite par rapport aux diamètres de ces tubes.

On demande de déterminer la surface du fluide élevé ou déprimé par l'action capillaire, entre les deux tubes cylindriques.

Cette solution, que nous ne pouvons pas développer maintenant, est donnée par ce théorème général : « En concevant les sphères $AEaa_{1}$, $A'E'a'e'$, l'une la » plus grande, l'autre la plus petite de toutes celles tangentes aux deux cylindres, » les deux plans verticaux TEE'_{1}, Tee'_{1}, tangents à ces deux sphères, étant » plongés dans le même fluide que les deux cylindres, le fluide s'y élevera à » des hauteurs qui seront la projection MKN des hauteurs du fluide entre les » deux cylindres. (Cette projection est faite sur le plan vertical mené par les » axes des cylindres, ou sur un plan parallèle.)

Actuellement, cherchons suivant quelle loi doit s'élever ou s'abaisser un fluide entre deux sphères excentriques. Mais avant tout, récapitulons les principes sur lesquels nos considérations sont fondées.

I. Lorsqu'un fluide s'élève entre deux tubes enchâssés l'un dans l'autre et partout équidistants, pourvu que la différence de leurs rayons soit constante, quelle que soit la grandeur de ces rayons, et par conséquent la *courbure* des tubes,

le fluide s'élevera toujours à la même hauteur entre les deux cylindres. La seule distance des parois, et non leur courbure, influe donc sur l'élévation du fluide.

II. Si deux plans verticaux IP, Iφ sont plongés dans un fluide, et que l'on conçoive la petite sphère (s) tangente à ces deux plans dont l'angle soit assez petit, le fluide s'élevera à la même hauteur sur la verticale passant par le centre de (s), que si le plan Iφ devenu Iφ, toujours tangent à (s), était de plus parallèle au premier plan IP.

III. L'expérience fait voir que la hauteur verticale du fluide, dans le même tube vertical ou incliné, est la même.

IV. Nous admettrons donc également que si deux plans, verticaux ou non, forment entr'eux un angle *constant* très-petit, les hauteurs verticales du fluide seront toujours les mêmes à la même distance de l'intersection des deux plans; c'est-à-dire, pour les colonnes fluides où la petite sphère (s) a le même rayon.

Maintenant reproduisons un théorème général de géométrie que nous avons démontré dans le Mémoire cité plus haut, page 190.

Si deux sphères invariables sont les *enveloppes* extérieure et intérieure d'une infinité de sphères, par les centres des deux sphères *enveloppes*, menons un plan (Π) qui soit pris pour plan de projection; projetons sur lui les centres de toutes les sphères enveloppées, et transportons-y ces sphères mêmes avec leurs centres respectifs, elles vont remplir une nouvelle partie de l'espace; or, dans leur nouvelle position, elles seront toutes touchées par deux plans *enveloppes* (L′), (L″) qui serviront de *limites* à cette nouvelle partie de l'espace.

D'ailleurs ces deux plans, comme tout le reste du système, sont symétriquement placés par rapport au plan (Π); leur intersection sera donc sur ce plan, et perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux sphères invariables; etc.

Si maintenant nous concevons que les deux sphères invariables soient matérielles, d'une grandeur sensible, et cependant partout à distance capillaire; en les plongeant dans un fluide, voici ce qui arrivera : nous supposons d'abord que ces deux sphères ont leurs centres sur la même horizontale.

Par cette horizontale, menons le plan (Π) vertical, les deux plans limites (L′), (L″) seront nécessairement verticaux.

Or, les hauteurs du fluide entre les deux plans verticaux (L′), (L″) seront précisément les hauteurs du fluide entre les sphères données; c'est-à-dire, que la surface du fluide compris entre les plans (L′), (L″), trace sur le plan *milieu* (Π) une courbe qui, sur ce plan, est la projection verticale de la suite des points *milieu* de la surface fluide entre les deux sphères données.

IIme MÉMOIRE.

Mais nous avons vu, dès le commencement de cette note, que les points *milieu* du fluide compris entre deux cylindres de révolution, ont pareillement pour projection verticale les hauteurs du fluide compris entre deux plans limites pareillement déterminés : de là résulte ce nouveau théorême.

Si le même fluide est soumis à l'action capillaire de corps homogènes,

1°. Entre deux sphères dont les centres sont de niveau ;

2°. Entre deux cylindres verticaux ayant pour bases les grands cercles de ces sphères ;

3°. Entre deux plans tangents aux petites sphères enveloppées par les deux sphères ou les deux cylindres (leurs centres transportés sur le plan vertical de symétrisme des sphères et des cylindres donnés).

Le fluide sera élevé ou déprimé à la même hauteur entre les deux sphères, entre les deux cylindres, entre les deux plans. De manière que la courbe qui sur le plan de symétrisme marquera ces hauteurs entre les deux plans matériels, sera la projection verticale des courbes qui marqueront les hauteurs correspondantes entre les deux sphères et les deux cylindres matériels. J'ajouterai que de ces deux dernières courbes, l'une est sur un cylindre à base elliptique, l'autre sur un sphéroïde elliptique.

Mais si les centres des sphères matérielles n'étaient pas sur une horizontale, il faudrait, par ces deux centres, concevoir un plan vertical (Π); puis deux cylindres circonscrits aux deux sphères, et dont les axes, perpendiculaires à cette droite, fussent dans le plan (Π) : puis, enfin, deux plans limites (L'), (L'') dont l'intersection fût parallèle à ces axes. Alors, encore, la courbe des hauteurs du fluide entre les plans (L'), (L'') serait sur le plan (Π) la projection des courbes des hauteurs du fluide, d'abord entre les deux cylindres, ensuite entre les deux sphères. N'étendons pas plus loin ces généralités.

NOTE V.

Sur l'ambiguité des signes des rayons de courbure.

Dans la page 116, nous présentons les rayons de courbure sous la forme positive, quoi qu'ils nous aient été donnés sous la forme négative, d'après la suite de nos calculs, art. III, § II (aussi faut-il lire, page 104, [1].... $\rho + P = -$) : il n'y a cependant en cela aucune erreur. Parce que le facteur $\alpha = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ étant susceptible des signes $\pm$, ce ne peut être qu'une circonstance étrangère qui détermine plutôt l'adoption d'un signe que de l'autre.

FIN DES NOTES DU SECOND MÉMOIRE.

TROISIÈME MÉMOIRE,

SUITE DE LA THÉORIE DES TANGENTES CONJUGUÉES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

DE L'INDICATRICE.

ARTICLE PREMIER.

ÉQUATION DE L'INDICATRICE DE LA COURBURE DES SURFACES.

Théorème fondamental. *Pour chaque point non singulier d'une surface, il existe toujours une ligne du second degré placée sur le plan tangent, ayant pour centre le point que l'on considère, et telle enfin qu'elle* indique *et caractérise toujours tout ce qui peut être relatif à la courbure de la surface, à partir du point qu'on a pris pour centre.* Telle est la courbe que nous nommons *indicatrice.*

Trouvons premièrement l'équation de l'indicatrice. Considérons l'équation aux différentielles mêlées

$$\frac{Y-y}{X-x}+\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}=0,$$

 que nous avons trouvée dans le Mémoire précédent, § II, art. I, comme appartenant aux tangentes conjuguées. Nous verrons qu'elle devient simplement aux différentielles ordinaires, lorsqu'on y regarde r, s, t comme des constantes arbitraires dont la valeur particulière est exprimée en fonction des coordonnées du point x, y, z, où l'on se suppose sur la surface dont on analyse la courbure. Alors cette équation devient celle d'une ligne courbe dont la nature, pour chaque valeur particulière de r, s, t, c'est-à-dire, pour chaque point particulier de la surface, doit faire connaître les relations qu'ont entr'elles les tangentes conjuguées, et par suite *indiquer*, déterminer la forme même de la surface.

Observons d'abord que dans l'espace nous concevrons toujours la ligne courbe dont nous parlons, comme si elle était rapportée sur le plan tangent $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$, quoique souvent nous nous contentions de raisonner sur sa projection comme sur elle-même, ce qui est permis dans leurs propriétés communes.

Dans l'équation

$$\frac{Y-y}{X-x}+\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}=0,$$

$\frac{Y-y}{X-x}$ et $\frac{dy}{dx}$ exprimant la direction des deux tangentes conjuguées (placées évidemment sur le plan tangent), demandons-nous la courbe telle qu'au point X, Y, sa tangente soit toujours $\frac{dy}{dx}$; il suffira de faire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}.$$

Par cette hypothèse, l'équation des tangentes conjuguées deviendra

$$r(X-x)dX+s[(Y-y)dX+(X-x)dY)]+t(Y-y)dY=0.$$

Mais dans cette équation (comme nous restons toujours au même point x, y de la surface), x, y, et par conséquent, r, s, t sont cons-

tantes. Cette équation est donc immédiatement intégrable, et elle donne

$$(i)\ldots\qquad r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=C,$$

C étant une constante arbitraire (*).

Or, cette équation est celle d'une courbe du second degré, placée sur le plan tangent à la surface en x, y, z, et de plus, ayant son centre en ce point. *Voilà l'indicatrice;* et cette courbe, dans les différentes variétés que peut offrir sa figure, va nous faire connaître les formes diverses dont peut être susceptible la courbure des surfaces. Nous allons d'abord présenter les propriétés que cette courbe donne à la fois à tous les genres de surfaces; nous dirons ensuite quelles propriétés caractéristiques elle imprime à chacun de ces genres en particulier.

En conservant toujours à φ' et ψ', ou plus simplement à φ et ψ la même signification, nous aurons encore, comme dans le Mémoire précédent,

$$\psi=\frac{Y-y}{X-x},\qquad \varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}.$$

Or, la première de ces deux équations est celle d'un diamètre de l'indicatrice (i), puisque c'est l'équation d'une droite qui passe par le centre x, y.

La seconde, mise sous la forme $\varphi=\frac{\upsilon-Y}{\xi-X}$, est celle de la tangente à l'indicatrice, menée par le point X, Y (υ, ξ étant les coordonnées courantes de cette tangente) : donc aussi $\varphi=\frac{\upsilon-y}{\xi-x}$ est

(*) Pour chaque valeur différente de la constante C, l'équation (i) représente une courbe particulière; mais comme tous les termes où les coordonnées se trouvent, les contiennent à la même puissance; toutes les courbes diverses obtenues par la variation de la constante arbitraire C, seront semblables et semblablement placées dans l'espace; c'est-à-dire auront leurs lignes homologues parallèles.

 l'équation du diamètre conjugué au précédent. D'où résulte d'abord ce théorême général :

Chaque systême de tangentes conjuguées de la surface au point x, y, z, *est formé par deux diamètres conjugués de la courbe indicatrice qui correspond à ce point* x, y, z.

Telle est la loi qui, sur le plan tangent, lie entr'elles les positions des systêmes de droites que nous avons nommées *tangentes conjuguées;* loi qu'exprime l'équation

$$\frac{Y-y}{X-x}+\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}=0;$$

ou plus simplement celle-ci (Mém. précéd., art. I, § II),

$$(A)\ldots\quad r+s(\varphi'+\psi')+t\varphi'\psi'=0,$$

qui est identique avec elle.

Autrement. Nous pouvons parvenir à l'équation de l'indicatrice par un moyen moins élémentaire, mais plus direct, et qui va nous faire connaître une nouvelle propriété de cette courbe.

Supposons que, l'équation de la surface primitive étant $z=\varphi(x,y)$, les x et y deviènnent $x+dx$, $y+dy$; en développant la valeur de l'accroissement dz, on aura, comme on sait,

$$(d)\ldots\quad dz=pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\frac{1}{1.2.3}.\text{ etc.}$$

Et l'équation du plan tangent sera

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

Donc aussi l'équation d'un plan parallèle au plan tangent, et qui en est éloigné d'une distance dh mesurée sur l'axe des z, sera

$$X-z-dh=p(X-x)+q(Y-y).$$

Déterminons maintenant l'intersection de ce plan et de la surface primitive.

X, Y, Z devenant alors des points de cette surface, infiniment

voisins de x, y, z, puisque dh est infiniment petit; on a

$$Z-z=dz, \quad X-x=dx, \quad Y-y=dy;$$

et l'équation du plan coupant se réduit à

$$dz-dh=pdx+qdy.$$

Retranchant membre à membre cette équation du développement (d), on a

$$dh=\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\frac{1}{1.2.3}(\alpha dx^3+\text{etc.}\ldots)+\text{etc.}$$

Mais les différentielles du troisième ordre et au-delà, disparaissent devant celles du second : on a donc enfin

$$2dh=rdx^2+2sdxdy+tdy^2,$$

pour la projection sur le plan des x, y de la section cherchée.

Si nous comparons cette équation avec celle de l'indicatrice

$$(i)\ldots\quad C=r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2,$$

nous verrons qu'elles deviennent identiques lorsqu'on donne à C la valeur infiniment petite $2dh$. De là résulte donc ce nouveau théorême :

Un plan infiniment voisin du plan tangent, et qui lui est parallèle, coupe la surface suivant une courbe du second degré, indicatrice *de la courbure de la surface, à partir du point que l'on considère.*

Les diamètres conjugués de cette courbe d'intersection sont donc aussi les tangentes conjuguées de la surface.

ARTICLE II.

Propriétés des diamètres conjugués de l'indicatrice.

L'équation (i), en nous faisant connaître la direction des diamètres conjugués de la courbe indicatrice, vient de nous montrer

IIme MÉMOIRE. l'identité de cette direction avec celle des tangentes conjuguées de la surface. Voyons maintenant ce que la grandeur de ces diamètres pourra nous apprendre sur la grandeur des rayons de courbure des sections dirigées suivant les tangentes conjuguées, et normalement à la surface.

La distance du centre x, y, z de l'indicatrice au point X, Y, Z de cette courbe, représentée par a, donne

$$a^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2.$$

Mais la courbe étant placée sur le plan tangent,

$$Z-z = p(X-x) + q(Y-y).$$

Si par cette dernière équation nous faisons disparaître $Z-z$ de la valeur de a^2, cette valeur devient

$$a^2 = (1+p^2)(X-x)^2 + 2pq(X-x)(Y-y) + (1+q^2)(Y-y)^2.$$

Supposons ensuite, comme nous l'avons fait jusqu'ici, $\frac{Y-y}{X-x} = \psi$, l'équation (i) de l'indicatrice deviendra

$$C = (X-x)^2 (r + 2s\psi + t\psi^2).$$

Ces deux équations déterminent complettement a^2, et elles donnent

$$a^2 = C. \frac{(1+p^2) + 2pq\psi + (1+q^2)\psi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2}.$$

Si nous comparons cette valeur du quarré a^2 du demi-diamètre de l'indicatrice, à celle du rayon ρ de la section normale faite dans la surface, suivant la direction de ce diamètre $\frac{Y-y}{X-x} = \psi$, Mémoire précédent, § II, art. III,

$$\rho = -\alpha. \frac{(1+p^2) + 2pq\psi + (1+q^2)\psi^2}{r + 2s\psi + t\psi^2},$$

nous aurons immédiatement

$$\frac{a^2}{\rho} = -\frac{C}{\alpha},$$

valeur où C et $\alpha = \sqrt{(1+p^2+q^2)}$ sont constantes pour le même point x, y, z de la surface, quel que soit ψ : nous pouvons donc poser ce troisième théorème comme propriété générale des indicatrices.

En chaque point d'une surface, les rayons de courbure des sections normales ont leurs longueurs proportionnelles aux quarrés des diamètres tracés par ces sections dans la courbe indicatrice de la surface.

Il est visible qu'en faisant $C = \alpha$, ce qui est toujours permis (*), on a simplement $\rho = a^2$. Alors l'équation des diamètres de l'indicatrice pourra remplacer l'équation des rayons des sections normales.

Ce théorème, comme nous le ferons voir avec détail, ramène immédiatement l'examen des formes des surfaces quelconques à la simple considération des lignes planes du second degré.

On sait que le plus grand et le plus petit des diamètres d'une courbe du second degré, sont les deux diamètres conjugués qui se coupent à angle droit; qu'il y a toujours un pareil système pour chaque courbe, et que, le cercle excepté, il ne saurait y en avoir un plus grand nombre.

Donc aussi, parmi les sections faites normalement sur la surface à partir d'un point donné, il y en aura toujours une plus grande et une plus petite que toutes les autres; leurs directions seront conjuguées, et leur caractère unique sera d'être constamment à angle droit : voilà les lignes de courbure.

(*) Par cette hypothèse, nous ne voulons pas dire que le quarre a^2 d'une ligne a puisse être effectivement égal à une simple ligne ρ; mais qu'en prenant pour unité une certaine longueur quelconque, les nombres a, α, C et ρ seront tels qu'on aura toujours cette égalité de rapports

$$\frac{a^2}{\rho} = -\frac{C}{\alpha}.$$

On sait aussi que dans les courbes du second degré, la somme des quarrés des diamètres conjugués est constante, et qu'elle est égale à la somme des quarrés des deux axes. Or, nous venons de voir que les rayons des sections normales des surfaces sont proportionnels aux quarrés des diamètres d'une courbe de ce degré (l'indicatrice). Nous pouvons donc conclure encore cet autre théorême relatif à la courbure des surfaces quelconques :

En chaque point d'une surface, quelle qu'elle soit, la somme des rayons de courbure de deux sections normales conjuguées est constante et égale à la somme des rayons de courbure de la surface au même point. Puisque, comme nous venons de le dire, ces derniers rayons appartiennent aux deux sections conjuguées à angle droit.

Les courbes du second degré sont toutes symétriques par rapport aux deux axes qui se croisent rectangulairement à leur centre ; donc aussi la courbure des surfaces est, *à partir de chaque point*, symétrique par rapport aux deux axes de l'indicatrice, qui divisent ainsi la surface en quatre parts superposables deux à deux : quand ces parties sont superposées de cette manière, elles ont entr'elles un contact du second ordre. De plus, toutes les normales de la surface sont placées symétriquement par rapport aux deux plans normaux dirigés suivant les deux axes de l'indicatrice; donc les normales infiniment voisines du point que l'on considère, et qui ont leur point d'application sur ces plans, y sont tout entières, et coupent la normale primitive chacune en un point, centre de la plus grande ou de la moindre courbure de la surface.

Mais dans toute courbe du second degré, les normales parties de l'extrémité des axes ou des sommets, viennent toutes se croiser sur la droite menée par le centre de la courbe, perpendicu-

lairement à la surface (*); et toute autre normale de ces courbes, le cercle excepté, ne saurait rencontrer cette même droite. On voit donc aussi qu'en général les diverses normales de la surface ne sauraient rencontrer une normale infiniment voisine, si leurs points d'application avec le point que l'on considère, ne sont pas sur l'une des directions de plus grande ou de moindre courbure : au contraire, les normales parties de deux points immédiatement consécutifs et placés sur la même ligne de courbure, se rencontrent toujours.

On peut concevoir, dès à présent, avec quelle facilité l'*indicatrice* fait connaître toutes les propriétés générales des surfaces considérées dans leur courbure. Nous allons actuellement en faire l'application à l'examen des divers genres de courbures que les surfaces peuvent nous présenter.

ARTICLE III.

Discussion de l'indicatrice appliquée à la discussion des divers genres de courbure des surfaces.

L'équation

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=C$$

de l'indicatrice, étant celle d'une courbe du second degré, elle peut appartenir à l'ellipse, ou à l'hyperbole, ou à la parabole ; et ces trois variétés vont nous offrir trois genres différents de formes de surfaces.

En résolvant cette équation par rapport à $Y-y$, par exemple,

(*) Pour fixer les idées, si la courbe est une ellipse horizontale, aucune de ses normales, *horizontale ou non*, ne pourra rencontrer la verticale menée par le centre de l'ellipse.

 elle donne

$$Y - y = -\frac{s(X-x) \pm \sqrt{[Ct - (rt - s^2)(X-x)^2]}}{t},$$

équation qui représentera les formes suivantes, pour les diverses valeurs du coefficient de $(X-x)^2$,

$rt - s^2$	I Positif. II. Négatif. III. Nul.	INDICATRICE.	I. Ellipse. II Hyperbole. III. Parabole.

I. *Dans l'ellipse*, tous les diamètres sont réels, et par conséquent tous leurs quarrés sont positifs : donc lorsqu'une surface aura dans quelqu'un de ses points, l'ellipse pour courbe indicatrice, les rayons de toutes les sections normales en ce point seront de même signe, et les deux courbures de la surface, dirigées dans le même sens par rapport au plan tangent à la normale : enfin, le caractère analytique de cette forme des surfaces, sera donné par cette condition $rt - s^2 > 0$, qui rend l'indicatrice une ellipse.

II. *Dans l'hyperbole*, partie des diamètres sont réels, et par conséquent chacun d'eux a son quarré positif; tous les diamètres conjugués à ces premiers sont imaginaires, et par conséquent chacun d'eux a son quarré négatif. Donc lorsqu'une surface a dans un de ses points l'hyperbole pour indicatrice, partie des rayons des sections normales en ce point sont positifs, tandis que les rayons de toutes les sections conjuguées à celles-là sont négatifs; c'est-à-dire, que les premiers rayons sont tous dirigés dans un même sens par rapport au plan tangent, et que les rayons des sections conjuguées sont tous dirigés du côté opposé de ce même plan tangent. Quand l'indicatrice est une hyperbole, en un mot, les deux courbures de la surface sont dirigées en sens contraires; enfin, le caractère analytique de cette forme des surfaces est donné par la condition $rt - s^2 < 0$, qui rend l'indicatrice une hyperbole.

III. Venons au cas où l'indicatrice est une *parabole*, ce qui semblera difficile à concevoir, puisque l'indicatrice peut être une courbe finie rapportée à son centre, et qu'on a coutume de dire que la parabole n'a pas de centre. IIme MÉMOIRE.

Si dans l'équation (i) de l'indicatrice, qui résolue par rapport à $Y-y$, donne

$$Y-y=\frac{-s(X-x)\pm\sqrt{[Ct-(rt-s^2)(X-x)^2]}}{t},$$

nous faisons $rt-s^2=0$, cette valeur se réduit simplement à

$$Y-y=\frac{-s(X-x)\pm\sqrt{(Ct)}}{t}.$$

Or, cette équation est celle du système de deux lignes droites parallèles également éloignées de la droite

$$Y-y=\frac{-s(X-x)}{t},$$

qui leur est aussi parallèle.

Cette dernière droite est l'*axe* du système des deux parallèles; et comme elle est infinie (*), il faut, premièrement en conclure qu'un des rayons de courbure est infini; mais pour la même raison, deux droites parallèles peuvent être regardées comme une ellipse ou une hyperbole dont un axe seul est infini; ou bien, comme une *parabole* dont un axe devient fini. Alors il est évident que toute tangente à la surface passant par le point de contact x, y, peut être regardée comme un diamètre, et que toutes ont pour diamètre conjugué ou pour tangente conjuguée l'axe infini

$$Y-y=\frac{-s(X-x)}{t}.$$

Nous retrouvons donc ici toutes les propriétés des tangentes

(*) En effet, il est dans l'esprit de la théorie des infiniment petits, de considérer deux droites parallèles comme les deux côtés d'une ellipse dont le grand axe seul devient infini, ou d'une hyperbole dont l'axe imaginaire devient infini.



 conjuguées que, dans les deux Mémoires précédents, nous avons vues appartenir au genre de courbure que nous envisageons.

Nous venons de prouver que dans la section faite suivant la direction unique à laquelle toutes les autres directions sont conjuguées, le rayon de courbure est infini; par conséquent, la courbure est nulle dans ce sens. Donc la tangente à la surface menée suivant cette direction, est osculatrice à la surface. Ainsi nous pouvons développer, sans rupture et sans duplicature, les deux éléments infiniment petits qui sont à droite et à gauche de cette ligne, en les rabattant autour d'elle sur un seul et même plan. Donc, en cet élément, la surface est développable : enfin, le caractère analytique de cette forme des surfaces est donné par la condition $rt - s^2 = 0$, qui rend l'indicatrice une *parabole*.

Il nous reste à examiner deux cas particuliers, pour avoir épuisé ce qu'on peut dire sur la division des formes des surfaces en genres principaux. Si les coefficients différentiels r, s, t deviennent à la fois infinis, tous les diamètres de l'indicatrice deviennent infinis, et par conséquent avec eux tous les rayons de courbure des sections normales. Dans ce cas, la surface est absolument sans courbure au point que l'on considère, et osculée dans tous les sens par son plan tangent en ce point. Si r ou t seul devenait infini, il faudrait qu'on eût, suivant ces cas, $X - x = 0$ ou $Y - y = 0$: ces cas appartiennent à ceux où la surface se réduirait à une ligne courbe.

Supposons r et s infinis, mais $\frac{s}{r} = m$ limité, on aura pour équation de l'indicatrice

$$(X - x)^2 + 2m(X - x)(Y - y) = 0,$$

système de deux droites

$$X - x = 0,$$
$$X - x + 2m(Y - y) = 0.$$

On pourra regarder ces deux droites comme appartenant à une hyperbole dont les deux axes seraient nuls; et cette équation pouvant se rapporter à celles de toutes les autres espèces d'hyperboles, quand l'équation de l'indicatrice se présentera sous cette forme, tous les rayons de courbure seront nuls, la courbure de la surface sera infinie, et la surface osculée par un point, par le point même que l'on considère. IIIme MÉMOIRE.

C'est d'ailleurs ce dont on pourrait se convaincre *à priori* par la considération directe des rayons de courbure. Rappelons-nous de l'équation (II), Mémoire précédent, § II, art. III, qui fait connaître le produit des rayons de courbure,

$$[\text{II}]\ldots\quad \rho \text{P} = \frac{\alpha^4}{rt - s^2};$$

$\alpha^4 = (1+p^2+q^2)^2$ est plus grand que l'unité, d'ailleurs

$$rt - s^2 = \left(t - \frac{s}{r}.s\right) r;$$

or, nous supposons que $\frac{s}{r}$ est une grandeur finie m, quoique r et s soient infinis.

Donc, si cette grandeur n'est pas égale t (ce qui serait le cas des surfaces développables dont nous venons de parler il n'y a qu'un moment),

$$\left(t - \frac{s}{r}\right) s = (t - m)\frac{1}{0}$$

est infini, et par conséquent, $\rho\text{P} = 0$. Mais la surface n'étant pas développable, ρ ni P ne peuvent être infinis; donc, enfin ρ et P sont nuls.

ARTICLE IV.

Forme des surfaces aux points où les deux courbes sont égales, et dirigées dans le même sens.

Pour suivre toujours une méthode uniforme, nous considérerons d'abord les surfaces dont l'indicatrice est elliptique, ensuite

 Mémoire précédent, § II, art. II,

$$(C')\dots\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left\{\frac{1+q^2}{t}-\frac{pq}{s}\right\}.st+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left\{\frac{1+q^2}{t}-\frac{1+p^2}{r}\right\}.rt+\left\{\frac{pq}{s}-\frac{1+p^2}{r}\right\}.rs=0,$$

nous reconnaîtrons, à sa seule inspection, que tous ses termes s'évanouissent à la fois quand les deux rayons de courbure deviennent égaux, et qu'alors cette équation s'offrant sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.0+\left(\frac{dy}{dx}\right).0+0=0,$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$ devient indéterminé, et susceptible d'une infinité de valeurs différentes.

Cependant ne nous hâtons pas encore d'en conclure qu'aux points où les deux courbures de la surface sont égales et dirigées dans le même sens, viennent se croiser une infinité de lignes de courbure. Car nous savons par la théorie du calcul différentiel (*), qu'il est des cas où certaines grandeurs se montrent sous une forme indéterminée sans être telles en effet : ce sont ceux où l'équation générale dit plus ou dit moins que le cas particulier que l'on considère, d'où nous pourrions déjà conclure qu'en général, dans les points singuliers dont nous nous occupons actuellement, il y a plus ou il y a moins de deux lignes de courbure ; il y en aura donc une seule, ou trois, ou un plus grand nombre ; mais ces inductions excellentes pour nous guider dans la recherche de la vérité, ne doivent jamais être regardées comme des preuves absolues.

Eclaircissons d'abord cette difficulté par des considérations géométriques : l'indicatrice

$$(i)\dots\quad C=r(X-x)^2+2s\,(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2,$$

lorsqu'on néglige les quantités du troisième ordre, est susceptible

(*) La théorie de l'élimination présente aussi les mêmes particularités.

de se placer tout entière sur la surface, en faisant

$$X - x = dx, \quad Y - y = dy, \quad Z - z = dz,$$

et alors elle est aussi sur un plan (π),

$$Z - (z - dh) = p(X - x) + q(Y - y),$$

qui passe par le point $x, y, z - dh$, dh étant une constante arbitraire. C'est ce que nous avons déjà démontré dans ce Mémoire, voyez la seconde méthode de l'article I.

On peut en effet négliger ces puissances dans la recherche des axes (qui conduit à celle des lignes de courbure), lorsque ces mêmes axes sont inégaux; parce que les différences apportées par une telle simplification, n'altèrent la grandeur et la direction de ces axes que dans un rapport infiniment petit. Mais si les axes ne différaient qu'infiniment peu l'un de l'autre, ou s'ils étaient égaux (or, c'est le cas que nous considérons), on ne pourrait plus négliger les puissances du troisième ordre; il faudrait par conséquent regarder l'équation de l'indicatrice comme incomplette, et par conséquent aussi regarder l'équation des lignes de courbure, immédiatement dérivée (*) de celle-là, comme une équation inexacte.

(*) En effet, si, considérant l'équation des axes a, de l'indicatrice

$$a^2 = (1 + p^2)(X - x)^2 + 2pq(X - x)(Y - y) + [1 + q^2(Y - y)^2],$$

on observe que a est nécessairement un *maximum* ou un *minimum* par rapport aux autres diamètres, on aura pour cette condition,

$$0 = (1 + p^2) + pq\left[\frac{Y - y}{X - x} + \frac{dy}{dx}\right] + (1 + q^2)\frac{Y - y}{X - x}\cdot\frac{dy}{dx},$$

et l'équation des lignes de courbure résultera immédiatement de l'élimination de $\frac{Y - y}{X - x}$ entre cette équation et celle de l'indicatrice

(i).... $\quad C = r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)$,

qui différentiée, donne

C'est précisément parce que, dans le cas actuel, l'équation des lignes de courbure n'a plus toute la généralité que comporte la nature de ces lignes, qu'elle se présente sous une forme indéterminée; comme nous l'avions annoncé d'avance d'après les principes généraux de l'analyse.

Néanmoins nous allons voir que cette équation peut encore nous faire connaître la position des points singuliers que nous considérons, et la direction des lignes de courbure qui passent par eux.

Si je considère à la fois tous les points d'une surface, en chacun desquels les deux rayons de courbure sont égaux entr'eux, ou ce nombre sera limité, et alors les points seront isolés sur la surface; ou il sera infini et de nature à former sur la surface une courbe suivie: ou bien, enfin, la surface elle-même jouira dans tous ses points de la propriété d'avoir ses rayons de courbure respectivement égaux en chaque point, et toujours dirigés dans le même sens. Ce dernier cas, à la rigueur, n'appartient pas à cet article. Cependant pour ne pas revenir sans cesse sur le même objet, nous en montrerons aussi la solution.

Occupons-nous d'abord du cas le plus général, de celui où les points, à partir desquels les deux courbures sont égales, forment une courbe continue.

Déjà nous connaissons cette courbe; elle est indifféremment donnée ou par l'équation unique

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=4(rt-s^2)(1+p^2+q^2),$$

ou par la double équation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

$$0=r+s\left(\frac{Y-y}{X-x}+\frac{dy}{dx}\right)+t\,\frac{Y-y}{X-x}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur les équations correspondantes, d'où nous avons déduit celle de lignes de courbure (second Mémoire, art. II).

Si maintenant à partir d'un point x, y, z, où les deux courbures sont égales, je passe au point x', y', z' immédiatement consécutif et jouissant de la même propriété ; il est évident qu'en ce point

$$x \quad , \quad y \quad , \quad z$$

seront devenues

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz,$$

et par conséquent alors, au lieu de

$$p \quad , \quad q \quad ; \quad r \quad , \quad s \quad , \quad t \quad ,$$

on aura

$$p + dp \; , \quad q + dq \; ; \quad r + dr, \quad s + ds \; , \quad t + dt.$$

Maintenant nous mettrons

$$p' \quad , \quad q' \quad ; \quad r' \quad , \quad s' \quad , \quad t'$$

pour ces valeurs complettes. L'équation des lignes de courbure pour ce nouveau point sera donc, $(\overline{\mathrm{C}})$.....

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [(1+q'^2))s'-p'q't'] + \left(\frac{dy}{dx}\right) [(1+q'^2)r'-(1+p'^2)t'] + p'q'r'-(1+p'^2)s' = 0.$$

Puisqu'en ce nouveau point les deux courbures sont encore égales entr'elles, je dois avoir aussi pour ce point,

$$\frac{1+p'^2}{r'} = \frac{p'q'}{s'} = \frac{1+q'^2}{t'},$$

et par conséquent,

$$\left\{\begin{matrix} (1+q'^2)\,s' - \quad p'q'\,t' = 0 \\ (1+q'^2)\,r' - (1+p'^2)\,t' = 0 \\ p'q'\,r' - (1+p'^2)\,s' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{matrix} d\,[(1+q^2)\,s - \quad pq\,t] = 0, \\ d\,[(1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t] = 0, \\ d\,[\quad pq\,r - (1+p^2)s] = 0. \end{matrix}\right.$$

Enfin, nous observerons que le système de ces équations ne dira rien de plus que l'équation unique

$$[(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t]^2 = 4(rt - s^2)\,(1+p^2+q^2),$$

et son équation différentielle prise en marchant sur la surface primitive.

IIIme MÉMOIRE.

Mais si au lieu de suivre la direction des courbures égales, je veux me diriger sur les lignes de courbure du système général; j'observerai d'abord que les trois coefficients de l'équation primitive (C) des lignes de courbure étant nuls, les trois coefficients de l'équation dérivée ($\overline{\mathrm{C}}$) se réduisent aux simples différentielles de ces dernières; et parce que les accroissements dy et dx ne monteront qu'au premier degré dans ces coefficients; que déjà $\frac{dy}{dx}$ appartenant aux lignes de courbure, est au second degré dans ces équations, l'équation ($\overline{\mathrm{C}}$) se réduira nécessairement à une équation du troisième degré en $\frac{dy}{dx}$; nous la représenterons par

$$(\Gamma) \ldots \quad \mathrm{A}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \mathrm{B}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mathrm{C}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{D} = 0.$$

Puisque cette équation est du troisième degré, elle a toujours une racine réelle, et ne peut pas en avoir seulement deux réelles: donc, quand les ombilics sont donnés par une équation de cette forme, *premièrement, il passe toujours au moins une ligne de courbure par chaque ombilic; secondement, il ne peut pas y en passer deux seulement; troisièmement, il peut en passer trois.*

Il est évident que l'équation générale (Γ) sera satisfaite d'elle-même lorsque l'équation

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 = 4(rt - s^2)(1+p^2+q^2)$$

qui appartient à la ligne des courbures égales, aura lieu; ou, ce qui revient au même, le système des équations différentielles

$$d[(1+q^2)s - \quad pq\,t] = 0,$$
$$d[(1+q^2)r - (1+p^2)t] = 0,$$
$$d[\quad pq\,r - (1+p^2)s] = 0.$$

Ainsi, *des trois facteurs dans lesquels on peut concevoir l'équation* (Γ) *décomposée, il y en aura toujours un qui présentera*

$\frac{dy}{dx}$ *sous une forme* rationnelle, *et ce facteur sera donné par*
l'équation différentielle de l'équation unique des courbures égales : donc alors une courbe unique représente un systême particulier de lignes de courbure, et qui n'a rien de commun avec le systême général donné par l'équation ordinaire (C) *des lignes de courbure.*

De sorte que le facteur du second degré restant, représentera les deux lignes du systême général; par conséquent, ces lignes au point que l'on considère, seront toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires. Il y a plus, je dis qu'elles seront généralement réelles, et ne pourront devenir imaginaires que pour quelques points particuliers (exception dont nous parlerons dans un moment). En effet, l'équation (Γ) n'est autre chose que l'équation (C) des lignes de courbure au point $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, point où les deux courbures ne sont plus égales; puisque nous marchons sur les deux lignes autres que la ligne des courbures égales. Aussi $\frac{dy}{dx}$ aura nécessairement deux valeurs réelles; puisque toutes les valeurs de l'équation (C) sont réelles pour les parties réelles de la surface (*).

(*) Pour se convaincre de la vérité de cette assertion, observons que si dans l'équation (C) les valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sont réelles, elles le seront encore en changeant de plans coordonnés, de la manière la plus générale. Supposons donc qu'on rende le plan tangent parallèle au plan de projection des x, y; alors p et q s'évanouissent, et l'équation des lignes de courbure devient simplement

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0,$$

équation du second degré dont le terme constant est négatif, ce qui exige que les deux racines soient constamment réelles; donc, aussi, en repassant au systême général de plans coordonnés, les deux valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ seront encore réelles pour tout autre point qu'un ombilic.

 Passons maintenant au cas où la surface n'aurait qu'en des points isolés ses deux courbures égales. Il est évident qu'alors on ne pourra point passer, d'une manière continue, d'un de ces points à l'autre : il faudra donc, quand on fera pour cet effet, dans les coefficients de l'équation (C) des lignes de courbure,

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz;$$

il faudra, dis-je, que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent imaginaires.

Ainsi, dans ce cas tout opposé au précédent, les deux racines du facteur du second degré appartiendront à la ligne unique des courbures égales, laquelle ligne ne sera plus qu'un système de points.

Et par conséquent, alors, le facteur linéaire appartient à la fois aux deux lignes de courbure du système général. Donc, dans ce cas, la plus grande et la moindre courbure, au lieu d'être constamment à angle droit, se confondent dans leur direction.

Quoique ces dernières conséquences semblent bien différentes de celles du cas précédent, elles ne sont pourtant pas contradictoires avec lui. Car si deux des trois racines de l'équation (Γ) pouvaient appartenir encore aux lignes de courbure du système général, il y en aurait au moins une qui serait imaginaire; tandis que nous avons démontré qu'elles sont constamment réelles. C'est donc pour satisfaire à cette condition plus générale, que les deux racines du facteur du second degré appartiennent aux courbures égales dès qu'elles sont imaginaires; alors le facteur linéaire, et par conséquent réel, reste pour satisfaire aux lignes de courbure qui s'identifient au point que l'on considère.

Il pourrait, au reste, s'offrir un cas singulier, lorsque la ligne des courbures égales se réduit à des points isolés. Quoiqu'alors, pour cette courbe, le point $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ soit nécessairement imaginaire, $\frac{dy}{dx}$ pourrait être réel. Alors, aussi, l'équation

du troisième degré (Γ) aurait ses trois racines réelles. Mais si l'on passait aux projections sur les plans des x, z et des y, z, il n'y aurait plus qu'une racine réelle, toujours appartenante au système général des lignes de courbure : nous rentrons ainsi dans le cas précédent.

Observons, enfin, que si les quantités

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

ne différaient que par un facteur constant, les différentielles première, seconde, troisième,.... à l'infini des coefficients

$$(1+q^2)s - pqt, \quad (1+q^2)r - (1+p^2)t, \quad pqr - (1+p^2)s$$

seraient constamment nulles. On ne pourrait donc jamais avoir de valeurs particulières pour $\frac{dy}{dx}$ au point que l'on considère, et cette grandeur resterait par conséquent indéterminée. Alors une infinité de lignes de courbure se croiseraient au point x, y, z.

Les différentielles des trois coefficients de (C) seraient aussi constamment nulles, si la double équation

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

contenait dans chacun de ses membres un radical qui s'évanouît au point x, y, z. Il y aurait donc encore une infinité de lignes de courbure qui se croiseraient en ce point. Or, un radical s'évanouira dans

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t},$$

lorsque deux ou un plus grand nombre des points où les deux courbures sont égales, se confondront en un seul point. Ainsi, *les ombilics où se croisent une infinité de lignes de courbure peuvent être considérés chacun comme le système de deux ombilics où il ne passerait qu'une ligne de courbure.*

L'ellipsoïde va nous offrir un exemple extrêmement remarquable de ces deux espèces d'ombilics. Considérons d'abord le cas le plus général, celui où les trois axes de l'ellipsoïde sont inégaux.

Si dans la section principale du grand et du petit axe, je cherche le diamètre égal au moyen axe, ces deux dernières lignes seront à angle droit; elles seront les axes de la section faite sur l'ellipsoïde par le plan qui les contient; mais nous les supposons égales : donc la section est un cercle. Maintenant, faisons marcher le plan coupant parallèlement à sa position primitive; il arrivera enfin à n'être plus qu'infiniment peu distant du plan tangent qui lui est parallèle; alors il coupera l'ellipsoïde suivant une courbe infiniment petite, et ce sera l'indicatrice appartenant au point de contact de ce même plan tangent. Or, toutes les sections faites par des plans parallèles, sur les surfaces du second degré, sont des courbes semblables. Donc l'indicatrice que nous considérons est un cercle, et par conséquent le point qui lui correspond sur l'ellipsoïde, un ombilic.

Mais sur la section principale du grand et du petit axe, je puis toujours trouver deux diamètres égaux au moyen axe. Ainsi les plans qui passeront par le moyen axe et par chacun de ces diamètres, nous offriront deux sections circulaires différemment dirigées sur l'ellipsoïde : d'ailleurs, on peut toujours mener, parallèlement à un plan donné, deux plans tangents à l'ellipsoïde. Nous trouverons donc quatre plans tangents parallèles aux sections circulaires; par conséquent quatre indicatrices circulaires, et dès lors quatre ombilics de l'ellipsoïde. Enfin, comme on ne saurait tracer sur la surface aucun cercle dirigé dans l'espace, autrement que ceux dont nous venons de parler, il ne saurait y avoir sur l'ellipsoïde ni plus de quatre indicatrices circulaires, ni par conséquent plus de quatre ombilics.

Enfin, le système de ces quatre ombilics devant être à la fois symétrique par rapport aux plans principaux, ils sont deux à deux

sur l'un de ces plans, et il est facile de voir qu'ils sont tous quatre sur le plan du grand et du petit axe.

Ces quatre points sont isolés sur l'ellipsoïde; voilà pourquoi il ne passe par chacun d'eux qu'une ligne de courbure; c'est la moyenne section principale. Elle est ainsi divisée en quatre parties, alternativement de la courbure $>$, $<$, $>$ et $<$: les deux plus grandes contiennent les sommets du grand axe, les deux moindres les sommets du petit axe.

Maintenant supposons que le moyen axe diffère de moins en moins du petit axe, les plans des sections circulaires se rapprocheront de plus en plus du petit axe, et les quatre ombilics se rapprocheront de plus en plus, deux à deux, des sommets du grand axe.

Enfin, quand le moyen et le petit axe seront égaux, ces deux axe seront sur deux sections circulaires dont les plans ont leur direction identique; et les ombilics se réuniront deux à deux aux sommets du grand axe. Donc alors, au lieu d'une ligne unique, il passera par ces doubles ombilics une infinité de lignes de courbure. Nous savons en effet que l'ellipsoïde dont deux axes sont égaux, devient une surface de révolution dont les méridiens sont autant de lignes de courbure, et ces méridiens, en nombre infini, se croisent évidemment tous aux deux sommets de l'ellipsoïde (*).

(*) Si le moyen axe, au lieu de se rapprocher du petit, se rapprochait du grand axe, et lui devenait égal, les ombilics se rapprocheraient deux à deux des sommets du petit axe, pour s'y réunir dans ce dernier cas; et alors il y aurait encore une infinité de lignes de courbure qui passeraient par les doubles ombilics; alors ce seraient les lignes de moindre courbure, comme dans l'hypothèse précédente. Enfin, si les trois axes devenaient égaux, tout diamètre deviendrait le moyen axe; toute indicatrice, circulaire; par conséquent aussi tout point un ombilic, et toute ligne, une ligne de courbure : aussi la surface deviendrait-elle alors une sphère.

Nous ferions connaître avec une égale facilité le nombre, la position et la nature des ombilics de l'hyperboloïde à deux nappes. On trouvera peut-être quelque simplicité dans ces déterminations géométriques d'éléments, où les calculs différentiel et intégral avaient seuls conduit jusqu'ici.

Récapitulons, enfin, la série des faits que nous venons de parcourir. Voici les variétés principales qu'offre la forme des surfaces à partir des points où les deux courbures devenant égales et l'équation générale des lignes de courbure prenant une forme indéterminée, c'est l'équation du troisième degré aux différences ordinaires $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui remplace cette équation.

I. Lorsque les points de la surface où les deux courbures sont égales, forment une ligne courbe, en chacun de ces points il y a trois lignes de courbure, savoir : deux lignes de courbure du système général, et la ligne unique des courbures égales. La courbe lieu des centres de cette dernière ligne, est précisément l'intersection des surfaces des centres de moindre et de plus grande courbure. Ainsi, *les normales à la surface dans toute l'étendue de la ligne des courbures égales se coupent consécutivement, et forment une surface développable : voilà pourquoi cette ligne est aussi une ligne de courbure.*

II. Lorsque les points où les deux courbures sont égales, sont isolés, et par conséquent en nombre fini, chacun d'eux représente une branche entière de la ligne des courbures égales; les tangentes de ces branches y deviennent imaginaires, et par conséquent en nombre pair : enfin, par chaque point il ne passe plus qu'une seule ligne de courbure réelle. Cette ligne unique appartient à la fois aux groupes des lignes de plus grande et de moindre courbure, de manière qu'en marchant sur elle, lorsqu'on dépasse ce point, on se porte des lignes de plus grande sur celles de moindre courbure,

ou réciproquement : tels sont les ombilics de l'ellipsoïde, et de l'hyperboloïde elliptique.

III. Enfin, dans les points où les deux courbures sont égales*, et pour lesquels les coefficients de l'équation ordinaire des lignes de courbure ne diffèrent que par des facteurs constants; ou, pour parler le langage de la géométrie, lorsque deux des ombilics que nous venons d'examiner se réunissent en un seul, une infinité de lignes de courbure viennent se croiser à ce double ombilic : tels sont les sommets des surfaces de révolution, des cônes, des coquillages en spirale, etc.....

Disons un mot maintenant de la surface qui, dans chacun de ses points, présenterait le caractère constant d'avoir ses deux courbures égales.

Rappelons-nous que le caractère constant des points qui jouissent de cette propriété, c'est que pour chacun d'eux l'indicatrice devient un cercle, et que la surface est osculée dans tous les sens par une sphère. On peut donc alors regarder la surface proposée comme l'enveloppe par osculation, d'une sphère variable de rayon, ou d'un rayon constant; par conséquent en chaque point l'*indicatrice circulaire* sera entièrement sur l'enveloppe et sur la sphère enveloppée correspondante à ce point. Mais par la théorie des enveloppes, nous savons que la courbe de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée, est à la fois sur deux enveloppées immédiatement consécutives. De plus, l'intersection de deux sphères est toujours un cercle dont le centre est en ligne droite avec les centres des deux sphères, et dont le plan est perpendiculaire à cette droite. Ainsi quand deux sphères ont un point commun sur la droite qui joint leurs centres, il faut que le cercle de leur intersection se réduise à ce point unique qui est son centre, ou qu'elles aient à la fois tous leurs autres points communs, et soient par conséquent identiques.

Mais quelle que soit la forme d'une surface, on peut toujours mener un plan infiniment près de chaque plan tangent, et qui coupe la surface suivant une ligne : cette ligne est l'indicatrice. Donc, par la nature même des surfaces, cette ligne ne peut se réduire forcément à un point [ou à deux (*)], sans que la surface enveloppe se réduise à une ligne seulement. Il n'y a donc que la sphère, parmi les surfaces, dont les deux courbures soient partout égales ; et les seules grandeurs graphiques qui puissent ensuite présenter généralement cette propriété, sont les lignes courbes ou les surfaces dont l'aire est nulle. . . . .

Ainsi, ce résultat extraordinaire aux yeux même du géomètre qui l'a reconnu et démontré le premier, se déduit simplement comme une conséquence d'une méthode uniforme et générale.

On doit voir maintenant avec quelle facilité la considération de l'indicatrice nous fait connaître toutes les propriétés de la forme des surfaces. C'est qu'en effet elle est, comme son nom l'annonce, essentiellement propre à *indiquer*, à caractériser la forme de la courbure des surfaces, à partir de chaque point ; et elle conduira toujours aux solutions les plus simples dans les questions relatives à la courbure des surfaces, en fournissant d'ailleurs immédiatement les équations, ou l'équation du second ordre.

Comme ces développements ont déjà pris une étendue que l'on trouvera peut-être disproportionnée avec le reste de cet ouvrage, nous ne pousserons pas plus loin l'examen de la forme des surfaces dans les cas singuliers où il faudrait recourir à des équations (Γ'), (Γ''). . . . du quatrième ordre, ou du cinquième, ou au-delà. Nous les exposerons dans un Mémoire séparé.

(*) Elle se réduit au système de deux points, parce que l'équation de l'indicatrice est du second degré ; effectivement cela exige que la surface enveloppe se réduise à une ligne courbe.

ARTICLE V.

Parallèle des résultats de l'article précédent, avec les résultats déjà connus.

Je viens d'exposer mes idées sur les ombilics; je me suis efforcé de multiplier les preuves, de les vérifier par des exemples pour en augmenter autant qu'il était en moi la conviction. Mais comme les résultats de l'article précédent offrent quelques légères différences avec ceux de l'auteur qui le premier nous a fait connaître les points les plus remarquables de ceux dont nous nous occupons maintenant, nous croyons devoir rapporter les passages où ce grand géomètre s'est occupé d'un tel sujet. Que si nous nous trompons dans nos doutes, nous dirons pour notre excuse, avec un Italien ingénieux : *anche il fallare dopo un tanto maestro sarebbe bello.*

Nous allons d'abord rapporter le passage qui traite des ombilics en général; nous verrons après quelles sont les applications qu'il a présentées.

De la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux entr'eux et dirigés du même côté. Art. II, Analyse appliquée. Monge.

« Avant de quitter les différences secondes, nous observerons » qu'en faisant, pour abréger,

» $(1+q^2)r - pqs = A$,
» $(1+q^2)s - pqt = B$,
» $(1+p^2)s - pqr = C$,
» $(1+p^2)t - pqs = D$,

 » ce qui donne

$$» \quad A + D = h \text{ [*]},$$

$$» \; pq(A - D) = (1 + p^2) B - (1 + q^2) C.$$

» L'équation générale (E) [**] des lignes de courbure, qui devient
» alors

$$» \; B dy^2 + (A - D) \, dx dy - C dx^2 = 0,$$

» produit deux valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui ne diffèrent entr'elles que par
» le radical $\sqrt{(A-D)^2 + ABC}$.

» Or, ce radical est le même que celui qui entre dans la valeur
» du rayon de courbure, c'est-à-dire, que la quantité
» $(A-D)^2 + 4BC$, ou $(A+D)^2 - 4(AD - BC)$ est $= h^2 - 4k^2 g$ [***],

---

[*] $$h = (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t.$$

(Voyez Mémoire précédent, art. III, § II; l'équation aux rayons de courbure donnée par Monge.)

[**] Cette équation (E) n'est autre chose que notre équation

$$(C)\ldots \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [(1+q^2) s - pqt] + \frac{dy}{dx} [(1+q^2) r - (1+p^2) t] + pqr - (1+p^2) s = 0.$$

[***] En effet, en rapportant dans le Mémoire précédent, nos valeurs des rayons de courbure à celles d'Euler et Monge, données par l'équation

$$R = \frac{k}{2g} [-h \pm \sqrt{(h^2 - 4k^2 g)}],$$

nous avons vu qu'elles devenaient identiques, en remettant pour g, h, k leurs valeurs

$$g = rt - s^2, \quad h = (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t, \quad k^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

A la simple inspection de ces valeurs, il est évident que

$$A + D = (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = h,$$

comme nous l'avions indiqué dans la note [*] ci-dessus.

Mais par la définition même des grandeurs A, B, C, D,

» ce qui est facile à vérifier. Donc dans la surface dont nous nous
» occupons, et pour laquelle le radical est nul, les deux valeurs
» de $\frac{dy}{dx}$ relatives aux lignes de courbure, sont égales entr'elles.
» Donc, excepté les cas *particuliers* pour lesquels les trois quan-
» tités B, C, A — D sont chacune égales à zéro, et ne déterminent
» *aucune* valeur pour $\frac{dy}{dx}$, la surface n'a pour chaque point qu'une
» seule ligne de courbure : ainsi tous les points sont des ombilics
» analogues à ceux que nous avons remarqués être au nombre de
» quatre sur la surface de l'ellipsoïde. Recherchons d'abord les
» surfaces qui sont dans le cas de l'*exception*. . . . »

Ici, par une analyse infiniment élégante, Monge démontre que la sphère est la seule surface qui convienne à la coexistence des trois équations aux différentielles partielles du second ordre

$$B = 0, \quad C = 0, \quad A - D = 0,$$

lesquelles, comme il est évident à la seule inspection, ne sont

---

$$AD = [(1 + q^2)r - pqs]\,[(1 + p^2)t - pqs]$$

et

$$BC = [(1 + q^2)s - pqt]\,[(1 + p^2)s - pqr],$$

ou, en développant ces deux produits

$$AD = (1 + p^2 + q^2)rt + p^2q^2.rt + p^2q^2.s^2 - [(1 + q^2)rs + (1 + p^2)ts]pq\,;$$

et

$$BC = (1 + p^2 + q^2)s^2 + p^2q^2.s^2 + p^2q^2.rt - [(1 + q^2)rs + (1 + p^2)ts]pq\,:$$

produits dont la différence est évidemment

$$AD - BC = (1 + p^2 + q^2)(rt - s^2),$$

c'est-à-dire, $k^2.g$: donc

$$(A + D)^2 - 4(AD - BC) = h^2 - 4k^2g.$$

C'est précisément la partie de R placée sous le radical ; ce qui démontre le résultat avancé par Monge.

 autre chose que notre double équation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

Monge arrive ensuite à cette observation importante et qui lui est due, qu'il y a sur les surfaces des points par lesquels il ne passe qu'une seule ligne de courbure. Voici comment il s'exprime à ce sujet.

« Pour toute autre surface de ce genre (du genre où les deux » courbures sont égales et dirigées du même côté), chaque point » est un ombilic par lequel il ne passe qu'une seule ligne de cour- » bure, et l'équation de cette ligne

$$» \ \mathrm{B}dy^2+(\mathrm{A}-\mathrm{D})\,dxdy-\mathrm{C}dx^2=0$$

» étant un quarré parfait, peut être remplacé par sa racine quarrée, » qui est indifféremment l'une des deux suivantes :

$$» \ 2\mathrm{B}dy+(\mathrm{A}-\mathrm{D})\,dx=0,$$

$$» \ 2\mathrm{C}dy+(\mathrm{A}-\mathrm{D})\,dx=0,$$

» ou, remettant pour A, B, C, D, leurs valeurs, et chassant » r, s, t, l'équation de la ligne unique de courbure sera indiffé- » remment

$$» \ dx=\frac{2}{h}[(1+q^2)\,dp-pqdq],$$

» ou

$$» \ dy=\frac{2}{h}[(1+p^2)\,dq-pqdp],$$

» équations qui, appartenant à une même courbe, peuvent être » regardées comme équivalentes à celles de ses deux projections. »

Pour examiner avec attention cette théorie, considérons d'abord la surface de la sphère. Soit donc

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

son équation. J'en tire immédiatement, par des différentiations partielles successives,

$\frac{dz}{dx}=\pi=-\frac{x}{z}$; $\frac{dz}{dy}=\varkappa=-\frac{y}{z}$;

d'où

$1+\pi^2=+\frac{r^2-y^2}{z^2}$; $\pi\varkappa=+\frac{xy}{z^2}$; $1+\varkappa^2=+\frac{r^2-x^2}{z^2}$;

ensuite les coefficients différentiels du second ordre, sont

$\frac{d\pi}{dx}=\rho=-\frac{r^2-y^2}{z^3}$; $\frac{d\pi}{dy}=\frac{d\varkappa}{dx}=\sigma=-\frac{xy}{z^3}$; $\frac{d\varkappa}{dy}=\tau=-\frac{r^2-x^2}{z^3}$.

Donc enfin,

$\frac{1+\pi^2}{\rho}=-z$; $\frac{\pi\varkappa}{\sigma}=-z$; $\frac{1+\varkappa^2}{\tau}=-z$.

Donc aussi, pour tous les points de la sphère, on doit avoir

$$\frac{1+\pi^2}{\rho}=\frac{\pi\varkappa}{\sigma}=\frac{1+\varkappa^2}{\tau}.$$

Mais dès que les deux courbures d'une surface courbe sont égales en un point, et dirigées du même côté, cette surface est susceptible d'être en ce point osculée dans tous les sens par une sphère.

D'ailleurs p, q; r, s, t étant les coefficients différentiels partiels du premier et du second ordre d'une surface quelconque, il faudra, pour qu'un tel contact ait lieu, qu'on ait pour le point de ce contact,

$$\pi=p,\quad \varkappa=q;\quad \rho=r,\quad \sigma=s,\quad \tau=t;$$

donc aussi, dès qu'une surface sera dans un de ses points, susceptible d'être osculée par une sphère, on aura les relations suivantes entre les coefficients du premier et du second ordre de la surface générale

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

résultat auquel nous étions déjà parvenus d'une manière directe.

Si maintenant nous jetons les regards sur les quantités que Monge a désignées par A, B, C, D, nous verrons que la double équation précédente équivaut aux trois équations

$$B=0,\quad C=0,\quad A-D=0;$$

 car on a

$$\begin{cases} \frac{B}{st} = \frac{1+q^2}{t} - \frac{pq}{s} = 0; \\ \frac{C}{rs} = \frac{1+p^2}{r} - \frac{pq}{s} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A - D = \left(\frac{1+q^2}{t} - \frac{1+p^2}{r}\right) tr = 0, \\ A - D = \left(\frac{B}{st} - \frac{C}{rs}\right) tr = 0. \end{cases}$$

Donc l'équation (E) des lignes de courbure

$$Bdy^2 + (A - D)\, dxdy - Cdx^2 = 0,$$

dans tous les cas où les deux courbures deviennent égales et dans le même sens, présentera nécessairement $\frac{dy}{dx}$ sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; et ce caractère, au lieu d'être celui de quelques cas particuliers, de quelques exceptions, sera au contraire le caractère général et constant.

On ne pourra pas dire non plus que le radical $\sqrt{[(A-D)^2+4BC]}$ s'évanouit; car la vraie forme du radical est

$$\sqrt{\left(\frac{(A-D)^2}{4B^2} - \frac{C}{B}\right)} = \sqrt{\frac{0}{0}}.$$

On ne peut donc pas non plus en conclure que les deux racines de l'équation (E) deviennent égales entr'elles. Cette équation fournit alors une infinité de racines, et par conséquent n'en fournit plus aucune qui soit distincte : enfin, pour trouver dans ce cas la valeur véritable de $\frac{dy}{dx}$, il faut la traiter comme les quantités qui deviennent $\frac{0}{0}$. Or, on sait qu'au moyen de différentiations successives, on finit toujours par reconnaître cette vraie valeur. C'est ainsi qu'on verra dans chaque cas si $\frac{dy}{dx}$ est réellement un rapport susceptible d'une infinité de grandeurs différentes, ou s'il n'est pas une valeur particulière qui, en vertu de la loi de continuité, doive être regardée comme celle de la ligne courbe unique qui passe par ce point.

Mais voyons en effet si, B, C, A—D étant nuls, l'équation (E) n'est pas de nature à pouvoir présenter deux racines inégales, sans que pour cela $\frac{dy}{dx}$ devienne susceptible d'une infinité de valeurs différentes. III.me MÉMOIRE.

Que veulent dire les deux équations

$$2Bdy + (A - D)\,dx = 0,$$
$$2Cdx - (A - D)\,dy = 0?$$

Puisque nous avons démontré que B, C, A—D sont forcément nuls toutes les fois que les deux courbures deviennent égales et dirigées du même côté, ces équations auront lieu sans doute; mais est-ce une raison pour en conclure que les deux racines de l'équation

$$(E)\ldots\quad Bdy^2 + (A - D)\,dxdy - Cdx^2 = 0$$

sont égales alors? car même, sans parler des ombilics où se croisent une infinité de lignes de courbure, puisque Monge les a placés dans le cas de l'exception, nous observerons qu'il est des points-ombilics qui présentent encore leurs deux lignes de courbure séparées et à angle droit. Nous n'en offrirons qu'un seul exemple.

Plaçons un premier cercle sur un plan horizontal, et supposons qu'un second cercle vertical, égal au premier et mobile, ait son centre sur celui-ci, en restant toujours parallèle au même plan vertical. Considérons un moment la surface qui résultera de cette génération. Nous pourrions également rendre fixe le cercle vertical, et faisant mouvoir horizontalement un cercle horizontal de manière à s'appuyer sur le premier, nous produirions encore la même surface. Suivant ces deux générations, le centre du cercle mobile décrit un cercle horizontal dans le premier cas, vertical dans le second; joignons les centres de ces cercles par une droite, elle sera pour la surface un véritable *axe*, et ses extrémités les deux *sommets* de la surface. De plus, les cercles *principaux* qui passent par ces sommets

 seront autant de lignes de courbure de la surface, et seront les seules lignes de courbure qui passent par les mêmes sommets.

Cependant les cercles générateurs ayant tous même rayon, et ce rayon étant sur l'axe de la surface aux deux sommets où les deux courbures sont dirigées du même côté, les deux centres de courbure se confondent : ces deux sommets sont donc deux ombilics, et dans ce cas, les deux racines de l'équation (E) ne pourront pas être regardées comme égales.

Au contraire, ces deux racines sont égales au point où le cercle mobile devient tangent à l'un des cercles directeurs, parce qu'en ces points deux nappes se confondent en une seule, et présentent comme une espèce de tranchant; alors les deux courbures sont tangentes à l'arête de ce tranchant, qu'on peut regarder comme un point singulier de rebroussement.

Voici l'explication de ces anomalies : d'après la méthode de l'article précédent, il faudrait dans ce cas-ci, par deux différentiations successives, obtenir une équation (Γ'') dérivée de celle des lignes de courbure; alors elle serait du quatrième degré en $\frac{dy}{dx}$; et d'abord comme les points où la surface qui nous occupe a ses deux courbures égales, sont isolés sur cette surface, l'équation (Γ'') a nécessairement deux racines imaginaires; mais les deux autres appartenant au système ordinaire des lignes de courbure, seront toujours réelles. Dans un cas, elles seront inégales, et nous trouvons en effet deux lignes de courbure distinctes; dans l'autre cas, les racines deviennent égales, et nous ne trouvons plus qu'une ligne de courbure.

Suivons maintenant l'auteur de la Géométrie analytique, dans l'exemple qu'il a présenté, des ombilics par lesquels il ne passe plus qu'une seule ligne de courbure. Voici ce qu'il dit à ce sujet dans son beau travail sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Des lignes de courbure de l'ellipsoïde, art V.

« Ces points vers lesquels les ellipses et les hyperboles (pro-
» jections des lignes de courbure) tournent toutes leurs concavités,
» sont les projections de quatre points très-remarquables sur la
» surface courbe.... Ce sont quatre ombilics autour desquels les
» lignes des deux courbures sont pliées, toutes les unes d'un côté,
» et toutes les autres du côté opposé. Ces lignes se resserrent à
» mesure qu'elles en approchent, et dès qu'elles les atteignent,
» elles changent d'espèce.

» Art. IX. La plupart des autres surfaces ont des ombilics ana-
» logues à ceux que nous avons remarqués sur celle de l'ellip-
» soïde, et il est facile de trouver leurs positions avant même que
» d'avoir intégré l'équation des lignes de courbure; car les ombi-
» lics sont les points dans lesquels les lignes des deux espèces de
» courbure se changent l'une en l'autre, et par conséquent pour
» chacun desquels les deux lignes de courbure se confondent. Ces
» points sont donc ceux pour lesquels les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$
» que fournit l'équation générale des lignes de courbure, sont
» égales entr'elles; et l'on aura une relation entre leurs coordon-
» nées, en égalant à zéro le radical par lequel ces deux valeurs
» diffèrent entr'elles. Faisons-en l'application au cas de l'ellipsoïde,
» pour lequel l'équation générale différentielle des lignes de cour-
» bure est

$$» \; Axy\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}(x^2-Ay^2-B)-xy=0.$$

» Si, après avoir résolu cette équation du second degré algébrique,
» on égale à zéro le radical, on aura

$$» \; (x^2-Ay^2-B)^2+4Ax^2y^2=0,$$

» dont le premier membre est la somme de deux quarrés, et qui

IIIme MÉMOIRE. » ne peut rien exprimer de réel, à moins qu'on n'égale à zéro la » racine de chacun de ces quarrés ; ce qui donne en même temps » les deux équations

$$» \; x^2y^2 = 0,$$
$$» \; x^2 - Ay^2 - B = 0;$$

» mais la première de ces deux équations a elle-même deux fac- » teurs qui peuvent avoir lieu séparément : donc, nous avons » deux cas à considérer, 1°. le cas où l'on aurait en même temps

$$» \; y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - Ay^2 - B = 0;$$

» 2°. celui où l'on aurait en même temps

$$» \; x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - Ay^2 - B = 0.$$

» Le premier cas donne

$$» \; y = 0 \quad \text{et} \quad x = \sqrt{B} = \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{(*)}.$$

» Ce sont les coordonnées que nous avons trouvées pour les pro- » jections des ombilics sur le plan des x, y.

» Le second cas donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\sqrt{-1},$$

» qui sont les coordonnées d'un point imaginaire. Ainsi, il n'existe » pas sur la surface d'autres ombilics que ceux que nous avons » considérés.

» Nous aurons occasion, dans la suite, de voir des surfaces » dont tous les points sont de semblables ombilics. »

Je commencerai par observer que la propriété caractéristique et constante des ombilics n'est pas d'être le point de passage d'une courbure à l'autre courbure. C'est déjà ce que nous avons pu remarquer sur la surface même de l'ellipsoïde. Lorsqu'en effet

---

(*) $a > b > c$ étant les trois axes, $A = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, $B = a^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$.

deux axes diffèrent de moins en moins, les ombilics se rapprochent de plus en plus du troisième axe; et lorsqu'enfin les deux premiers sont égaux, les ombilics se réunissent deux à deux au sommet de l'ellipsoïde, ainsi que nous l'avons fait voir dans l'article précédent. Cependant, de côté et d'autre de ce point, les mêmes lignes de courbure restent toujours de la même espèce. Or, appellera-t-on ombilics tous ces points singuliers, tant que les axes seront inégaux, et lorsqu'un point sera la réunion des deux ombilics, devra-t-on pour cela cesser de l'appeler ombilic? Il nous semble que non.

Nous avons vu, d'ailleurs, en parlant de la surface engendrée de deux manières par un cercle constant, qu'aux points à la fois ombilics et sommets, il ne passe que deux lignes de courbure, et qu'en deçà comme au-delà de ces points, la même ligne conserve la même espèce de courbure, puisque la droite qui joint ces points, est un axe par rapport auquel toute la surface est symétrique. Ce n'est pas tout.

Il existe sur les surfaces des points où les deux espèces de courbures se changent l'une dans l'autre, sans que la direction des lignes de l'une et de l'autre espèce devienne pour cela identique, au contraire, elles restent toujours à angle droit; et cette propriété est généralement celle de tous les points de la ligne des courbures égales.

Pour vérifier cette proposition, plions un fil sur la courbe d'intersection des deux surfaces des centres; fixons-le par une extrémité, et tendons-le par l'autre qui vienne s'appliquer sur la surface primitive. Ce fil présentera trois parties bien distinctes; la première, c'est la portion de la courbe d'intersection le long de laquelle il est plié; la seconde, une portion de courbe des centres de plus grande courbure; la troisième, rectiligne, est le rayon de plus grande courbure: de sorte qu'en prolongeant ce rayon en deçà du centre de plus grande courbure, il vient toucher la seconde

 surface des centres : or, ce second point de contact est le centre de moindre courbure ou du plus grand rayon. Cela est évident.

A présent supposons que je développe ce fil en suivant toujours la même ligne de courbure. Jusqu'à ce que j'atteigne la ligne des courbures égales, il est évident que les deux surfaces des centres resteront respectivement, la première, celle des plus grandes, et la seconde, celle des moindres courbures. Mais en atteignant la ligne des courbures égales, si je veux suivre toujours la même ligne de courbure, le fil se pliera sur la seconde surface des centres, et son prolongement seulement viendra toucher la seconde partie de la courbe des centres dont ce fil décrit la développante.

On voit donc que le plus petit rayon de courbure, au lieu d'avoir son centre sur la première surface des centres, l'aura désormais sur la seconde; et, par conséquent, lorsqu'en suivant toujours la même ligne de courbure, je traverserai la ligne des courbures égales, je passerai de la plus grande à la moindre courbure, ou réciproquement. Or nous savons que dans ce passage les lignes des deux courbures restent à angle droit. Concluons enfin que le caractère de changer d'espèce ne suffit pas pour exiger que les directions de plus grande et de moindre courbure deviennent identiques aux points où les deux courbures sont égales entr'elles.

Définissons donc généralement les ombilics, des points isolés où les deux courbures de la surface deviennent égales entr'elles.

Voyons maintenant si, pour les ombilics de l'ellipsoïde, nous n'aurons pas encore entre les coefficients différentiels p, q; r, s, t la double équation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

qui, suivant nous, est le caractère général et constant des points où les deux courbures sont égales : $a>b>c$ étant les trois axes, l'équation de l'ellipsoïde est

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2.$$

De là nous tirerons

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z} = 0;$$

lorsque $y = 0$, c'est le cas des ombilics,

$$1 + p^2 = \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2}, \quad pq = 0, \qquad 1 + q^2 = 1,$$

$$r = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(b^2 - y^2), \quad s = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} xy = 0, \qquad t = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - x^2)$$

Donc, dans le cas des ombilics réels, où Monge trouve $y = 0$, il faudra qu'on ait

$$\frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2} \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}, \text{ ou } a^4 z^2 (b^2 - a^2 + x^2) - c^4 x^2 (a^2 - x^2) = 0.$$

Or quand $y = 0$, l'équation de l'ellipsoïde devient

$$c^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 c^2, \quad \text{d'où} \quad a^2 z^2 = c^2 (a^2 - x^2).$$

Donc l'équation précédente, en divisant par $c^2(a^2 - x^2)$, se réduit à

$$a^2 b^2 - a^4 + (a^2 - c^2) x^2 = 0,$$

d'où on tire

$$x = \frac{a\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - c^2)}}.$$

C'est précisément la valeur de x qui correspond aux points ombilics de l'exemple cité. La loi générale que nous avons assignée, a donc encore lieu dans ce cas entre p, q; r, s, t.

Mais que sont devenues les valeurs de $\frac{dy}{dx} = 0$? Envain l'évanouissement du radical, s'il a lieu, me donnera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - Ay^2 - B}{2Axy},$$

puisque cette grandeur est $= \frac{0}{0}$, je n'apprendrai rien pour cela.

Or, j'observe qu'en faisant $y = 0$, quel que soit x, le premier et le dernier terme de l'équation des lignes de courbure

$$Axy \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0$$

 s'évanouissent : il reste donc alors

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - Ay^2 - B) = 0,$$

équation constamment satisfaite en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$. Cette dernière équation est celle de la section plane principale faite dans la surface par le plan des x, y. Elle est donc une ligne de courbure dans toute son étendue, et quoique sa tangente s'offre sous la forme $\frac{0}{0}$ au point ombilic, c'est-à-dire, au point où $y = 0$ et $x^2 = B$, elle passe toujours par ce point, en vertu de la loi de continuité (*).

Employons donc la méthode générale que nous avons exposée dans l'article précédent, et différentions l'équation

$$Axy\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0;$$

en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme constant, nous aurons

$$\left(Ax\frac{dy}{dx} + Ay\right)\frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\left(x - Ay\frac{dy}{dx}\right) - x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

et ordonnant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - Ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ (**)}.$$

(*) Si l'on demandait quelle est pour tous les points de la section principale $\frac{dy}{dx} = 0$, l'autre valeur de ce rapport, on verrait, en divisant par y l'équation

$$Axy\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0,$$

que $\frac{dy}{dx}$ devrait être infini.

(**) Le géomètre Paoli, l'un des hommes de l'Italie qui tiennent le premier rang dans les sciences mathématiques, en revoyant ces observations qu'il eut la complaisance d'examiner avec les Mémoires précédents, a bien voulu faire

Dès-à-présent j'observe que cette équation, lorsque $y=0$, a pour facteur $\frac{dy}{dx}=0$. C'est le facteur réel, c'est la direction unique des lignes de courbure. Ensuite, en faisant $y=0$, ordonnée des points ombilics, le facteur du second degré en $\frac{dy}{dx}$ devient II

$$Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x=0, \quad \text{ou} \quad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$$

Mais $A=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$ est toujours positif, puisque $a>b>c$: donc le facteur du second degré qui appartient à la ligne des courbures égales est toujours imaginaire. C'est aussi ce que nous avions démontré devoir être en général.

Observons enfin qu'en faisant $x=0$, $\frac{dy}{dx}$ devient indéterminé dans $Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x=0$; or

$$x=\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2-c^2)}}$$

donc $a=b$; alors l'ellipsoïde est une surface de révolution, son sommet est sur l'axe c des z, et les ombilics $x=0$, $y=0$ ne sont autre chose que les sommets mêmes de l'ellipsoïde.

ARTICLE VI.

Forme des surfaces aux points où les deux courbures sont égales et dirigées en sens opposé.

Nous allons parler maintenant des points singuliers des surfaces où les deux courbures sont égales, mais dirigées en sens opposés.

---

ce développement qui donne les trois valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et me communiquer ses réflexions dont j'ai beaucoup profité. Je me fais un devoir et surtout un plaisir de témoigner au professeur Paoli toute ma reconnaissanse.

 Puisque les deux courbures sont opposées, l'indicatrice est nécessairement une hyperbole, et comme les deux courbures sont égales, les quarrés des axes de l'hyperbole sont égaux, au signe près; ainsi l'hyperbole indicatrice est équilatère.

Or, dans l'hyperbole équilatère, la somme des quarrés des diamètres conjugués est constamment égale à zéro : donc aussi la somme des rayons de sections conjuguées est constamment nulle, c'est-à-dire que les rayons de deux sections conjuguées sont toujours égaux, mais dirigés en sens opposés : enfin la direction de deux diamètres conjugués est toujours symétrique par rapport à chaque asymptote. Il suit de là que dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole équilatère, non-seulement la surface a ses courbures principales et opposées, égales, ainsi que les courbures de ses sections conjuguées; mais les sections dont la courbure est la même, sont dirigées symétriquement, par rapport aux deux asymptotes de l'indicatrice. Ainsi les deux axes et les deux asymptotes de l'indicatrice sont tels, que quatre plans normaux dirigés un à un, suivant ces lignes, divisent la surface en huit parties égales quatre à quatre et symétriques deux à deux.

Maintenant puisque la somme des rayons des sections conjuguées est (Mém. précéd., art. III.)

$$(\mathrm{I})\ldots\ \rho+\mathrm{P}=-\alpha\,\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2},$$

si cette somme est nulle, on a immédiatement

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Telle est l'équation de condition propre aux points dont les deux courbures sont égales, mais dirigées en sens contraires.

Nous venons de dire un mot des asymptotes de l'indicatrice; la direction de ces lignes est extrêmement remarquable. Suivant cette direction, la courbure de la surface est nulle, puisque le rayon de la section normale, dirigée suivant elle, est infini.

Maintenant si nous supposons qu'en se plaçant sur une surface à courbures opposées, on veuille parcourir une ligne telle qu'en chacun de ses points elle ait pour tangente l'asymptote de l'indicatrice appartenante à ce point; on formera de la sorte deux systêmes de lignes courbes, et, dans le cas qui nous occupe, les lignes d'un premier systême couperont partout, à angle droit, les lignes de l'autre systême : comme le font entr'elles les lignes des deux courbures.

Mais les lignes asymptotiques ont dans tous les cas un grand avantage sur les lignes de courbure ; car ces dernières se rencontrant partout à angle droit, l'angle sous lequel elles se coupent ne peut indiquer aucun rapport entre les courbures de la surface. Il n'en est pas ainsi de l'angle formé par les lignes asymptotiques. Il est facile de voir en effet que le rapport des deux rayons de courbure est une fonction uniquement dépendante de la grandeur de cet angle (*).

Ainsi la seule connaissance des lignes asymptotiques donnera immédiatement en chaque point le rapport des deux courbures de la surface. Cherchons donc l'équation de ces lignes.

Reprenons pour cela l'équation (i) de l'indicatrice

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=C,$$

(*) Soient α, $\beta\sqrt{-1}$ les axes de l'hyperbole indicatrice ; j'ai de suite $\frac{\beta}{\alpha}$ pour la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'asymptote avec l'axe réel. De plus, les deux rayons de courbure P et ρ doivent être tels que

$$\frac{P}{\rho}=\frac{\frac{\beta^2}{\alpha}}{\frac{\alpha^2}{\beta}}=\frac{\beta^3}{\alpha^3}:$$

donc *le rapport des rayons de courbure est exprimé par le cube de la tangente trigonométrique de l'angle que l'asymptote forme avec l'axe réel :* rapport facile.

IIIme MÉMOIRE. qui appartient à l'hyperbole dès que $rt - s^2$ est négatif. Si je fais la constante $C = 0$, l'équation (i) devient

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = 0:$$

c'est le système de deux lignes droites; c'est la projection sur le plan des x, y des asymptotes de l'indicatrice. Si maintenant on veut avoir l'équation différentielle des courbes asymptotiques, c'est-à-dire, des courbes qui partout ont pour tangentes de telles asymptotes, il suffira d'écrire dy et dx au lieu de $Y-y$ et $X-x$, dans cette dernière équation. Ainsi l'équation des lignes asymptotiques est immédiatement

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

équation bien plus simple que celle des lignes de courbure.

Observons en passant que

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$$

est la différentielle complette de

$$pdx + qdy = dz:$$

donc $d^2z = 0$ est l'equation des lignes asymptotiques; et comme c'est l'équation du plan tangent à la surface, nous voyons, premièrement, qu'en chaque point de la surface, le plan tangent la coupe suivant deux courbes distinctes, dont les tangentes sont précisément les asymptotes de l'indicatrice; secondement, que ces deux courbes sont chacune osculatrice d'une des lignes asymptotiques qui se croisent au même point.

Appliquons ces généralités. Cherchons l'équation des lignes asymptotiques des surfaces du second degré dont les deux courbures sont en sens opposés. Prenons les valeurs que nous avons trouvées (art. précédent) pour p, q; r, s, t : quoiqu'elles appartiennent à l'ellipsoïde, en changeant le signe de b^2 ou de c^2, elles appartiendront de suite à l'hyperboloïde hyperbolique.

Or,

$$r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2-y^2),\quad s = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}.xy,\quad t = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2).$$

On a donc pour équation des lignes asymptotiques,

$$(b^2-y^2)\,dx + 2xydxdy + (a^2-x^2)\,dy^2 = 0;$$

d'où je tire immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy \pm \sqrt{[x^2y^2-(a^2-x^2)(b^2-y^2)]}}{a^2-x^2} = -\frac{xy \pm \sqrt{[b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2]}}{a^2-x^2}.$$

Or, l'équation de la surface du second degré est, par hypothèse,

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2;$$

donc

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = -\frac{a^2b^2}{c^2}.z^2.$$

Nous supposerons un seul axe c imaginaire et nous aurons

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.z^2.$$

Donc, enfin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy \pm \frac{ab}{c}.z}{a^2-x^2}.$$

Maintenant j'observe que l'équation du plan tangent à la surface du second degré est

$$b^2c^2Xx + a^2c^2Yy + a^2b^2Zz = a^2b^2c^2;$$

Mettant l'équation précédente sous la forme

$$\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{xy \pm \frac{ab}{c}.z}{a^2-x^2};$$

d'où

$$Y = y - \frac{xy \pm \frac{ab}{c}.z}{a^2-x^2}.(X-x).$$

Substituant cette valeur dans l'équation du plan tangent, pour avoir l'autre projection de l'asymptote, j'ai

$$a^2b^2Zz + b^2c^2Xx + a^2c^2y^2 - a^2c^2.y.\frac{xy \pm \frac{ab}{c}.z}{a^2-x^2}.(X-x) = a^2b^2c^2.$$

 Or, j'observe que si dans cette équation je fais $X=x$, $Z=z$ c'est-à-dire, si je me suppose à la fois sur l'asymptote et sur la surface, j'ai

$$a^2b^2z^2 + b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 = a^2b^2c^2.$$

Donc l'asymptote est tout entière sur la surface, et n'est autre chose que la ligne asymptotique.

Par chaque point d'une surface du second degré, dont les deux courbures sont opposées, passent donc toujours deux lignes asymptotiques rectilignes, tout entières sur la surface; et l'angle de ces lignes fait immédiatement connaître le rapport des deux courbures de la surface.

Nous reviendrons ailleurs sur ce sujet; nous ferons connaître les lignes asymptotiques de quelques genres de surfaces, où elles s'offrent d'une manière remarquable: enfin, nous trouverons pour les surfaces dont les deux courbures sont dans le même sens, un système de lignes, comme celui-ci, différent des lignes de courbure, mais symétriquement placé par rapport à ce dernier; et tel que l'angle des lignes de différent système fera toujours connaître, de la même manière, le rapport des deux courbures de la surface (*): c'est le système des lignes constamment tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice.

Proposons-nous maintenant de trouver la condition pour que les deux lignes asymptotiques se croisent à angle droit, c'est-à-

(*) Si l'on nomme α et β les deux axes de l'ellipse indicatrice; $\frac{\beta}{\alpha}$ sera la tangente trigonométrique de l'angle formé par les diamètres conjugués égaux avec l'axe α; et $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$ sera le rapport $\frac{P}{\rho}$ des rayons de courbure de la surface: résultat, comme on voit, analogue à celui donné par les lignes asymptotiques, lorsque l'indicatrice est hyperbolique, et par conséquent les deux courbures en sens opposés.

dire, pour que les deux courbures de la surface soient égales et opposées.

A cet effet, faisons, pour la première ligne asymptotique,

$$\frac{dy}{dx} = \lambda', \quad \frac{dz}{dx} = \mu';$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \lambda'', \quad \frac{dz}{dx} = \mu'',$$

pour la seconde ligne asymptotique; nous aurons d'abord

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

et les deux racines de $\frac{dy}{dx}$, tirées de cette équation, donneront simultanément λ' et λ''. Donc, premièrement $\lambda'\lambda'' = \frac{r}{t}$.

Les lignes asymptotiques se dirigeant sur le plan tangent, on a

$$dz = pdx + qdy, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{dz - pdx}{q},$$

valeur qui, substituée dans l'équation des lignes asymptotiques, donne, en ordonnant les termes,

$$(q^2r - 2pqs + p^2t)\,dx^2 + 2(qs - pt)\,dxdz + tdz^2 = 0:$$

or, μ' et μ'' sont les deux racines $\frac{dz}{dx}$ de cette équation : donc

$$\mu'\mu'' = \frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{t}.$$

Mais les deux lignes asymptotiques se couperont évidemment à angle droit dès qu'on aura

$$1 + \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' = 0:$$

donc enfin,

$$1 + \frac{r}{t} + \frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{t} = 0, \quad \text{ou} \quad (1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0.$$

C'est précisément l'équation de condition que nous avions tirée de la comparaison des rayons de courbure. Nous aurions pu nous dispenser d'y parvenir une seconde fois, mais comme l'artifice de

 calcul que nous avons employé pour cela, peut être utile, et semble assez ingénieux, nous avons cru devoir l'offrir ici.

ARTICLE VII.

Des surfaces dont la courbure jouit d'un caractère constant dans chacun de leurs points.

Nous venons d'examiner successivement à quelles conditions peuvent être attachées les formes diverses dont sont susceptibles les surfaces, dans leurs points pris isolément. Mais on peut aussi vouloir considérer des surfaces qui présentent dans toute leur étendue chacun des caractères que nous avons reconnus pouvoir appartenir à quelques-uns de leurs points. On va voir que par la simple différence du point de vue sous lequel on envisagera les équations de condition que nous ont donné, pour des points isolés, ces différents caractères, les mêmes équations seront, ou seulement celles de quelques points particuliers et remarquables des surfaces, ou les équations générales (aux différentielles partielles) des familles de surfaces dont tous les points jouissent du caractère individuel qu'exprimait primitivement cette équation.

PREMIÈRE CLASSE.

Surfaces à courbures dirigées dans le même sens.

Nous avons vu que les deux courbures d'une surface quelconque sont, en un de ses points, dirigées dans le même sens ou en sens opposés, suivant que pour ce point $rt - s^2$ est positif ou négatif. En faisant donc

$$rt - s^2 = F(x, y, z),$$

si par les valeurs dont x, y, z sont susceptibles en vertu de l'équation générale de la surface, F ne peut jamais changer de

signe, la surface aura dans tous ses points le même genre de courbure. Ces deux courbures seront partout dirigées dans le même sens, si le signe constant de F est positif, tandis qu'elles seront partout dirigées en sens opposés, si le signe constant de F est négatif. Les surfaces du second degré jouissent toutes de ce caractère; pour une même surface de ce genre, F ou $rt - s^2$ est toujours positif ou toujours négatif; c'est ce qu'on pourrait démontrer immédiatement par la simple transformation des coordonnées, ou mieux encore par l'inspection de l'indicatrice. (Voyez l'art. IX de ce Mémoire). Voilà pourquoi les surfaces du second degré présentent dans tous leurs points leurs deux courbures dirigées à la fois dans le même sens comme pour l'ellipsoïde, le paraboloïde et l'hyperboloïde elliptiques; ou constamment en sens contraires, comme pour le paraboloïde et l'hyperboloïde hyperboliques. Enfin, le caractère géométrique des surfaces pour lesquelles F a toujours le même signe, c'est que pour tous leurs points, l'indicatrice est constamment une ellipse ou constamment une hyperbole.

Mais si F est susceptible de changer de signe, alors dans une partie des points de la surface, les courbures sont dans le même sens, et pour tous les autres points, elles sont en sens contraires; dans ce cas, la surface $F(x, y, z) = 0$, ou celle $\frac{1}{F(x, y, z)} = 0$ traceront sur la primitive une courbe qui sera sur celle-ci la ligne de démarcation des points à courbures dans le même sens, d'avec ceux à courbures en sens opposés. Remarquons que dans toute l'étendue de cette ligne, 1°. F ou $rt - s^2$ étant nul, la surface confondra sa forme avec celle des surfaces développables; c'est-à-dire, que la suite des tangentes conjuguées aux tangentes de cette courbe, formera une surface développable. Offrons un exemple de ce genre de surfaces. Supposons qu'une sphère constante de rayon se meuve de manière que son centre décrive une courbe

 plane, l'enveloppe de l'espace parcouru par cette sphère sera telle, qu'une partie de la surface aura ses deux courbures dans le même sens, l'autre ses deux courbures en sens contraires; et si l'on conçoit qu'un diamètre toujours perpendiculaire au plan lieu des centres, suive dans son mouvement la sphère génératrice, il tracera sur l'enveloppe la ligne de démarcation pour laquelle $rt-s^2$ est constamment égal à zéro; cela posé, tous les points de la surface, placés du côté de la convexité de cette ligne, ont leurs courbures dirigées dans le même sens, et les autres en sens contraires. Enfin, toutes les tangentes conjuguées à cette ligne sont évidemment placées dans un plan unique, celui de la ligne de démarcation, partout tangent à l'enveloppe. Ces tangentes conjuguées forment donc une surface développable.

2°. Dans le cas où $rt-s^2$, au lieu de devenir nul, devient infini, la ligne de démarcation confond la forme de la surface avec celle d'une courbe, et la courbure de la surface est infinie. Dans toute la limite marquée par

$$\frac{1}{rt-s^2}=\frac{1}{\mathrm{F}(x,y,z)}=0,$$

elle serait osculée par la ligne de démarcation, et cette ligne appartiendrait tout entière à la surface des centres de courbure: elle serait donc généralement, pour cette surface, une véritable arête de rebroussement ou une ligne d'inflexion.

Si non-seulement les deux courbures de la surface devaient partout être dirigées dans le même sens, mais qu'en chaque point les deux rayons de courbure dussent être égaux; cette seconde condition pourrait être exprimée ou par une équation unique

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)=\mathrm{F}(x,y,z)=0,$$

ou par le système de deux équations

$$\frac{1+p^2}{r}-\frac{pq}{s}=\mathrm{f}(x,y,z)=0,\quad \frac{1+q^2}{t}-\frac{pq}{s}=f(x,y,z)=0.$$

Or, chacune des équations $\mathrm{f}=0$, $f=0$ étant à elle seule propre

à caractériser toute une famille de surfaces, leur système, ou ne représente plus que la suite des intersections des surfaces des deux familles qui leur appartiennent, ou seulement le genre particulier de surfaces pour lesquelles les fonctions arbitraires des intégrales seraient choisies de manière à satisfaire à ces deux équations différentielles partielles. IIIme MÉMOIRE.

Dans ce dernier cas on trouverait que les sphères sont la seule espèce de surfaces susceptibles de satisfaire à la fois, et généralement, à ces deux équations.

Mais si l'on veut seulement tracer sur une surface donnée la ligne où les deux courbures sont égales, on fera coexister l'équation $F=o$ avec l'équation primitive, ou, ce qui revient au même, l'équation primitive avec les deux équations $f=o$ et $f=o$. Alors on trouvera, ou une ligne continue, c'est celle des courbures égales; ou des points isolés, ce seront autant d'ombilics de la surface.

Toujours dans l'hypothèse où les deux courbures sont dans le même sens, si l'on voulait que les deux courbures fussent entre elles dans un rapport quelconque, ou que l'un des rayons fût constant, etc.; ou que les directions des deux lignes de courbure eussent une relation toujours la même; au moyen des équations que nous avons données et qui font connaître ces éléments et leurs rapports, après avoir trouvé la condition pour un point seulement, en l'étendant à tous les points de la surface, on formera d'abord autant de familles distinctes et toutes revêtues du caractère particulier que l'on considère. Ensuite, sur les surfaces d'une autre génération, on reconnaîtra les lignes continues, ou les points isolés qui satisfont à ces conditions étrangères, en combinant l'équation qui présente chacune de ces conditions, avec celle du genre dont on s'occupe.

Et comme cette marche est générale, quel que soit le sens des deux courbures, nous ne la suivrons pas de nouveau dans ce qui nous reste à dire; mais nous en ferons voir l'esprit par quelques applications.

SECONDE CLASSE.

Surfaces à courbures en sens opposés.

Nous avons vu déjà que le caractère de cette classe est d'avoir

$$rt - s^2 = F(x, y, z)$$

constamment négatif, il faudra donc qu'en combinant soit $F = 0$, soit $\frac{1}{F} = 0$, avec l'équation de la surface même, on ne trouve que des résultats imaginaires : telle est la condition générale qui appartient aussi à la classe qui nous occupe maintenant.

Si de plus on voulait que les rayons fussent égaux entr'eux en chaque point ; puisque la condition de cette égalité pour un point unique est donnée par l'équation

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0,$$

faisant

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + q^2) t = \lambda dd.f(x, y, z) = 0,$$

$f = 0$ serait l'équation générale de cette famille de surfaces. Jusqu'à présent on n'a pas pu obtenir cette équation intégrale, et l'on ne sait encore former les surfaces qu'elle représente, que par approximation ; en la composant successivement de zônes infiniment petites, revêtues chacune du caractère d'avoir leurs courbures opposées et égales. J'observe en passant que la vis rectangulaire est une de ces surfaces.

Si maintenant, sur une surface quelconque nous voulions reconnaître la série des points où les deux courbures opposées sont égales, substituant dans

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + q^2) t = 0,$$

pour p, q, r, s, t leurs valeurs en x, y, z, tirées de l'équation de la surface que l'on considère, cette équation particulariserait

la courbe que l'on considère et la ferait connaître. Nous observerons, au reste, qu'en général cette ligne des courbures égales, comme celle des surfaces de la classe précédente, divise les lignes de courbure en deux parties, de manière que pour chaque ligne, une partie appartient à la direction de la plus grande courbure, l'autre à la direction de la moindre courbure. IIIme MÉMOIRE.

TROISIÈME CLASSE.

Surfaces à simple courbure.

Les surfaces des deux classes précédentes présentent deux courbures bien distinctes à partir de chacun de leurs points. Mais si l'on voulait qu'une de ces courbures fût nulle ou fût infinie dans tous les points, à la rigueur la surface n'aurait plus qu'une seule courbure. Supposons d'abord qu'une des deux courbures doive être constamment nulle; toutes les lignes de cette courbure devront partout être osculées par leurs tangentes; il faut donc que chacune se confonde avec sa tangente, et soit par conséquent rectiligne. Mais deux tangentes consécutives, parties des points d'une ligne de seconde courbure, doivent, comme nous savons, se rencontrer. Donc, enfin, toutes les lignes de la courbure nulle forment une surface développable : c'est précisément la classe de surfaces que nous considérons. Maintenant, j'observe que pour que la courbure soit nulle, il faudra que

$$rt - s^2 = \lambda dd.F(x, y, z) = o$$

soit l'équation différentielle seconde de la surface $F = o$. C'est en effet l'équation des surfaces développables. Il est inutile d'ajouter comment on trouverait sur une surface quelconque, la série des points où sa forme devient développable; nous l'avons dit en parlant de la première classe des surfaces.

Si les deux courbures devaient être nulles à la fois, non-seule-

IIIme MÉMOIRE. ment $rt - s^2$ devrait être égal à zéro, mais les deux courbures étant égales alors, et pouvant être arbitrairement considérées comme dirigées en sens opposés, ou dans le même sens, il faudrait qu'on eût aussi

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t},$$

et
$$(1+p^2)\,r - 2pqs + (1+q^2)\,t = 0.$$

Or, la coexistence des deux premières et de $rt - s^2 = 0$, conduirait à ce résultat imaginaire,

$$1 + p^2 + q^2 = 0;$$

il faut donc alors que r, s, t soient nuls, pour que $rt - s^2$ s'évanouisse de lui-même, alors les quantités

$$\frac{1+p^2}{pq} = \frac{0}{0}, \quad \frac{1+q^2}{pq} = \frac{0}{0}$$

laisseront p et q susceptibles de toutes les valeurs possibles. Donc dans les surfaces dont la courbure est partout nulle, il faut qu'on ait

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0,$$

équations qui donnent, aux différentielles partielles du premier ordre, $p = a$, $q = b$, et pour intégrale complette $z = ax + by + c$; a, b, c étant des constantes arbitraires. C'est l'équation du plan, ce que nous savions devoir être, *à priori.*

Si l'on veut obtenir les points d'une surface quelconque où les deux courbures sont nulles à la fois, on fera

$$r = \mathrm{F}(x,y,z) = 0, \quad s = f(x,y,z) = 0, \quad t = \mathrm{f}(x,y,z) = 0.$$

Et si ces trois équations peuvent donner des valeurs de x, y, z qui satisfassent à l'équation de la surface primitive, les points correspondants à ces coordonnées seront ceux où les deux courbures seront nulles, et à partir desquels la surface sera osculée par un plan dans toutes les directions possibles.

Supposons maintenant qu'une des courbures doive être constamment infinie, et par conséquent son rayon toujours nul; la grandeur graphique qui pourra satisfaire à cette condition, ne sera plus une surface, mais une ligne. En effet, il faudrait qu'en général $P\rho = \frac{\alpha^4}{rt - s^2}$, produit des rayons de courbure, fût nul pour tous les points de la surface. L'équation $\frac{1}{rt - s^2} = 0$(*), devrait avoir lieu constamment; donc il faudrait qu'une fonction de x, y, z fût infinie pour toutes les valeurs possibles de x, y, z, ce qui est absurde; car il faudrait supposer qu'un facteur étranger à x, y, z et infini, entrât dans cette équation, et par conséquent dans r, s ou t. Or, c'est ce qui ne se peut que par l'évanouissement de quelques radicaux, et dans des cas particuliers. Donc il faudra regarder simplement l'équation $\frac{1}{rt - s^2} = 0$ comme celle d'une courbe qui, sur les surfaces, trace la ligne des courbures infinies : resultat où nous étions déjà parvenus en parlant de la première classe des surfaces.

IIIme MÉMOIRE.

Si les deux rayons de courbure devaient être nuls à la fois, on aurait de plus

$$P + \rho = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t}{(rt - s^2)} . \alpha = 0,$$

les valeurs de x, y, z appartenant à la grandeur graphique cherchée devraient donc à la fois satisfaire aux trois équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad P + \rho = 0, \quad P\rho = 0;$$

Donc elles ne pourraient appartenir qu'à des points isolés sur des surfaces quelconques. D'un autre côté, le point est la seule grandeur graphique qui, considérée dans sa généralité, ne présente qu'une courbure nulle dans tous les sens; c'est une expression de la nullité de ses dimensions.

(*) Nous ne parlons pas du cas où $\alpha = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = 0$; il est impossible.

ARTICLE VIII.

Application des principes précédents à la recherche des rayons de courbure des surfaces du second degré.

Avant de terminer ce que nous avons à dire sur la courbure des surfaces, considérée à partir d'un point unique, nous allons présenter la valeur générale du rayon de courbure des surfaces du second degré, ce qui nous donnera le moyen de faire connaître quelques propriétés de la courbure des surfaces de ce genre. On pourra d'ailleurs regarder cet article comme le complément des recherches de Monge sur la courbure de l'ellipsoïde; puisque ce géomètre n'a considéré que les lignes de courbure, et ne s'est pas occupé des rayons de la surface.

Lorsqu'on examine l'équation générale aux rayons de courbure des surfaces

$$R^2+R\,\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}+\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}=0,$$

équation qui résolue par rapport à R, donne

$$R=-\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(rt-s^2)}\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$\pm\sqrt{\left[\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(rt-s^2)}\right]^2(1+p^2+q^2)-\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}}.$$

On conçoit que quand p, q, r, s et t ne sont pas des fonctions de x, y, z extrêmement simples, cette valeur doit devenir d'une complication effrayante.

Cependant, quelquefois, par des transformations heureuses, on peut obtenir, pour les rayons de courbure, des expressions d'une élégance inattendue. C'est ce dont les surfaces du second degré vont nous offrir un exemple remarquable.

En prenant pour origine des coordonnées le centre de la surface, elle a pour équation

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Mettons d'abord cette équation sous la forme suivante,

$$\binom{\mathrm{z}}{\mathrm{a}} \ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et représentons a^2, b^2, c^2 par α, β, γ.

Si par deux différentiations partielles successives, nous cherchons les coefficients du premier et du second ordre de cette équation, ils seront,

Pour le premier ordre,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dz}{dx} = p = -\frac{\gamma}{z}\cdot\frac{x}{\alpha} \\ \\ \frac{dz}{dy} = q = -\frac{\gamma}{z}\cdot\frac{y}{\beta} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} 1 + p^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2} \\ pq = \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{xy}{\alpha\beta} \\ 1 + q^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{y^2}{\beta^2}; \end{array}\right.$$

ce qui donne encore

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{\gamma^2}{z^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right).$$

Passant ensuite au second ordre,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2z}{dx^2} = r = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}(\beta - y^2) \\ \frac{d^2z}{dxdy} = s = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot xy \\ \frac{d^2z}{dy^2} = t = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}(\alpha - x^2). \end{array}\right\} \text{d'où} \quad rt - s^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\gamma}{z} \; (*).$$

(*) En effet, si dans $rt-s^2$, nous mettons pour r, s, t leurs valeurs que nous venons de trouver, nous aurons

$$rt - s^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}[(\alpha - x^2)(\beta - y^2) - x^2y^2].$$

Or, il est évident que

III

IIIme MÉMOIRE. Si nous combinons ces valeurs avec les précédentes, il viendra

$$(1+p^2)\,t = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\left[(\alpha - x^2) + \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha - x^2)\right],$$

$$2pq\ s = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\left[\qquad - \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{2x^2y^2}{\alpha\beta}\qquad\right],$$

$$(1+q^2)\,r = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\left[(\beta - y^2) + \frac{\gamma^2}{z^2}\cdot\frac{y^2}{\beta^2}(\beta - y^2)\right],$$

J'observe maintenant qu'en prenant dans les seconds membres tout ce qui multiplie $+\frac{\gamma^2}{z^2}$, j'ai

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - \frac{x^4}{\alpha^2} - \frac{2x^2y^2}{\alpha\beta} - \frac{y^4}{\beta^2} = \left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}\right).$$

Enfin au moyen de l'équation $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$, cette valeur se réduit à

$$\left(1 - \frac{z^2}{\gamma}\right)\frac{z^2}{\gamma} = (\gamma - z^2)\,\frac{z^2}{\gamma^2},$$

quantité qui, multipliée par $\frac{\gamma^2}{z^2}$, se réduit elle-même à $\gamma - z^2$. Ainsi

$$(1+p^2)\,t - 2pqs + (1+q^2)\,r = -\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\left[(\alpha+\beta+\gamma) - (x^2+y^2+z^2)\right];$$

mais d'ailleurs

$$rt - s^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\gamma}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\gamma}{z}\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}};$$

donc aussi,

$$\frac{(1+p^2)\,t - 2pqs + (1+q^2)\,r}{rt - s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}}\left[(\alpha+\beta+\gamma) - (x^2+y^2+z^2)\right],$$

$$(\alpha - x^2)(\beta - y^2) - x^2y^2 = \alpha\beta\left(1 - \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}\right) = \alpha\beta\,\frac{z^2}{\gamma}$$

[en vertu de l'équation $\left(\frac{\Sigma}{2}\right)$] : donc enfin,

$$rt - s^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\alpha\beta . z^2}{\gamma} = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta . z^3}\cdot\frac{\gamma}{z}.$$

et

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2} = \alpha\beta\gamma\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^2.$$

Donc, enfin, la valeur des rayons de courbure des surfaces du second degré, est donnée en fonction des trois axes et des trois coordonnées d'un point quelconque par cette équation :

$$R = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}} \times$$
$$\left\{\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(x^2+y^2+z^2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)^2 - \alpha\beta\gamma\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)}\right\};$$

ou bien, en remettant pour α, β, γ leurs valeurs a^2, b^2, c^2,

$$R = \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} \times$$
$$\left\{\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)^2 - a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}.$$

Euler, dans son Mémoire où le premier il a fait connaître les propriétés principales de la courbure des surfaces, a donné la valeur du rayon des sections normales de l'ellipsoïde. Il prend pour équation de cette surface,

$$mx^2 + ny^2 + z^2 = a^2,$$

et il obtient une valeur qui, développée, a pour numérateur

$$[a^2 - m(1-m)x^2 - n(1-n)y^2]^{\frac{3}{2}}(m^2x^2 + n^2y^2),$$

et pour dénominateur,

$$a^2(m^3x^2 + n^3y^2)\cos\varphi^2 - mn(m-n)^2x^2y^2\cos\varphi^2$$
$$- 2mn(m-n)xyz\sqrt{a^2 - m(1-m)x^2 - n(1-n)y^2}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+ mn[a^2 - m(1-m)x^2 - n(1-n)y^2](mx^2 + ny^2)\sin\varphi^2.$$

Il faudrait donc différentier cette valeur par rapport à φ, égaler à zéro cette différentielle, et chasser φ au moyen de cette nouvelle équation; la double valeur de K qu'on obtiendrait alors, serait

 celle des deux rayons de courbure de la surface; mais cela jetterait dans un calcul immense.

On pourrait parvenir au même résultat par une voie peut-être plus simple et plus rapide, en faisant usage des propriétés dont jouissent les rayons de courbure des surfaces du second degré.

Rappelons-nous le moyen de décrire ces surfaces, que nous avons rapporté page 32, et concevons qu'un point x, y, z étant pris sur la surface, on mène, 1°. les deux axes D', D'' de la section diamétrale parallèle au plan tangent en x, y, z; 2°. ces deux axes étant regardés comme deux premières *directrices*, supposons qu'on détermine la troisième directrice Δ qui, avec elles, forme un système de directrices propre à la description de la surface.

Nous avons démontré, page 33, que les deux rayons de courbure au point x, y, z, ont respectivement pour expression

$$\frac{D'^2}{\Delta}, \quad \frac{D''^2}{\Delta}.$$

De plus, dans le Mémoire où nous avons fait connaître ce mode de description, nous avons démontré que le produit des trois directrices d'un même système est constant pour la même surface, et égal au produit des trois axes. Nous aurons donc d'abord

$$\Delta^2 D'^2 D''^2 = \alpha \text{ϐ} \gamma = \omega^2.$$

Ensuite le diamètre D, mené de l'origine au point x, y, z étant, par notre construction même, conjugué aux axes D', D'' de la section diamétrale, nous avons fait voir aussi que la somme des quarrés de ces trois diamètres est égale à la somme des quarrés des trois axes; donc

$$D^2 + D'^2 + D''^2 = \alpha + \text{ϐ} + \gamma = \mathfrak{A}^2;$$

par conséquent,

$$D'^2 + D''^2 = \mathfrak{A}^2 - D^2, \quad \text{mais} \quad D'^2 D''^2 = \frac{\omega^2}{\Delta^2}.$$

Donc aussi, par la théorie des équations du second degré,

$$D'^2,\ D''^2 = -\frac{\mathfrak{A}^2 - D^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}^2 - D^2}{2}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{\Delta}}.$$

Telle sera donc la valeur des deux rayons de courbure en divisant tout par Δ.

Or, D étant la distance du point x, y, z à l'origine,

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

de plus,

$$\mathfrak{A}^2 = \alpha + \beta + \gamma.$$

Enfin, Δ étant la distance de l'origine au plan tangent de la surface en x, y, z, et l'équation de ce plan étant

$$1 = \frac{Xx}{\alpha} + \frac{Yy}{\beta} + \frac{Zz}{\gamma}.$$

D'après les formules connues (Monge, Géom. Analyt., pag. 11),

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation que nous venons d'obtenir, il vient

$$R = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}} \times$$

$$\left\{ \frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(x^2+y^2+z^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{[(\alpha+\beta+\gamma)-(x^2+y^2+z^2)]^2}{2} - \alpha\beta\gamma\left[\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right]} \right\}.$$

C'est précisément l'équation que nous avons obtenue déjà. Mais cette dernière méthode réunit à l'avantage d'une très-grande simplicité, celui de nous apprendre ce que signifient toutes les grandeurs graphiques représentées par cette équation. Or, quand on veut bien connaître la science de l'étendue, il faut pouvoir exprimer, il faut exprimer toujours, et par l'analyse, ce qu'on a conçu par la géométrie; et par la géométrie, les résultats, les transformations mêmes de l'analyse.

ARTICLE IX.

Propriétés générales de la courbure des surfaces du second degré.

Avant de déduire des valeurs trouvées dans l'article précédent, les propriétés des surfaces du second degré qui doivent faire le sujet de cet article, nous commencerons par observer que l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1$$

étant susceptible d'appartenir, *sans exception*, à toutes les classes de surfaces du second degré, toutes les valeurs, tous les résultats conclus généralement de cette équation, appartiennent également à toutes les classes de cette famille de surfaces, même aux paraboloïdes qui pourtant n'ont pas de centre. (Voyez la note I.)

Actuellement, voyons quelle est l'équation de l'indicatrice, dont la forme générale est

$$(i)\ldots\quad r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=C.$$

Si nous substituons pour r, s, t les trois valeurs que nous avons trouvées, en supprimant d'ailleurs le facteur constant $-\frac{\gamma^2}{\alpha\beta.z^3}$ commun à ces trois coefficients, nous aurons simplement pour l'indicatrice des surfaces du second degré (puisque $\alpha=a^2, \beta=b^2$),

$$\binom{i}{2}\ldots\ (b^2-y^2)(X-x)^2+2xy(X-x)(Y-y)+(a^2-x^2)(Y-y)^2=c.$$

Si je cherchais les axes de cette courbe, donnés par l'équation différentielle de l'indicatrice, et par cette équation de condition

$$(X-x)\,dX+(Y-y)\,dY+(Z-z)\,dZ=0,$$

je trouverais immédiatement, en chassant dZ, une équation en $\frac{dY}{dX}$ (voyez l'article II de ce Mémoire), qui serait celle des lignes

de courbure telle que l'a donnée Monge : il est donc inutile de le faire.

En considérant l'équation $\left(\frac{i}{2}\right)$, j'observe qu'elle ne contient ni z, ni le troisième axe c; de là je conclus ce premier théorème :

Toutes les surfaces du second degré qui ont deux axes a *et* b *des* x, y *identiques, sont telles qu'en projetant les indicatrices de leur courbure sur le plan des axes identiques, ces projections sont pareillement identiques, quel que soit pour chaque surface le troisième axe* c.

Dans la note II, nous verrons cette même propriété prendre une extension plus grande encore pour tous les paraboloïdes.

Maintenant, nous allons recourir à l'équation de l'indicatrice pour classer les surfaces du second degré, et par son moyen, on va voir que nous allons atteindre ce but de la manière la plus simple.

Nous supposerons constamment $a^2 > b^2 > c^2$. Cela posé, si nous considérons la valeur donnée dans l'article précédent, pour la quantité dont dépend la nature de l'indicatrice

$$rt - s^2 = \frac{\gamma^4}{z^4} \cdot \frac{1}{\alpha 6 \gamma} = \frac{c^8}{z^4} \cdot \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

Nous verrons que $\frac{\gamma^4}{z^4} = \frac{c^8}{z^4}$ étant nécessairement positif pour tous les points de la surface, et le second facteur $\frac{1}{\alpha 6 \gamma} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$ ne contenant ni x, ni y, ni z, il conservera le même signe aussi pour tous les points de la même surface. D'où résulte ce second théorême :

Dans tous les points d'une même surface du second degré, l'indicatrice est elliptique, ou elle est constamment hyperbolique.

Entrons dans l'examen de ces deux cas principaux.

Le facteur $\frac{\gamma^4}{z^4}$ étant, comme nous venons de le dire, nécessai-

IIIme MÉMOIRE. rement positif, le produit $rt - s^2$ sera lui-même positif ou négatif, suivant que l'autre facteur $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ le sera pareillement; or, $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ est positif ou négatif, lorsqu'un nombre pair ou impair des facteurs α, β, γ est négatif.

Donc, premièrement, *l'indicatrice est constamment elliptique*, et les deux courbures sont dirigées dans le même sens pour tous les points de la surface du second degré où α, β, γ, c'est-à-dire a^2, b^2, c^2 sont positifs, *c'est le cas de l'ellipsoïde;* et pour tous les points de la surface où deux des trois demi-axes a, b, c ont leur quarré négatif; *c'est l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes.*

Secondement, *l'indicatrice est constamment hyperbolique*, et les deux courbures sont dirigées en sens opposés dans tous les points de chaque surface du second degré dont un seul demi-axe a, ou b, ou c a son quarré négatif; *c'est l'hyperboloïde à une nappe*, ou, comme on est convenu de l'appeler, *l'hyperboloïde hyperbolique.*

Et d'après ce que nous avons dit au commencement de cet article, les mêmes propriétés appartiennent également aux *paraboloïdes* soit elliptiques, soit hyperboliques; c'est-à-dire, que leur indicatrice est aussi constamment, suivant ces deux cas, une ellipse ou une hyperbole.

Actuellement, revenons sur la formule par laquelle nous avons obtenu la valeur des rayons de courbure des surfaces du second degré. Au moyen de la seconde méthode qui nous y a conduits, nous avons vu ce que signifie chacune des grandeurs dont est composée cette formule; nous allons lire ce que signifient les combinaisons qu'elles présentent, et cette simple interprétation nous fera connaître plusieurs théorêmes nouveaux.

Dans la valeur générale

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\times$$
$$\left\{\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)^2-a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}$$

nous avons vu que la quantité

$$a^2b^2c^2\cdot\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2$$

est égale au produit R′R″ des deux rayons R′, R″ correspondants au double signe ± du radical. D'ailleurs Δ étant la distance du centre au plan tangent en x, y, z, on a

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{\Delta^2}.$$

Donc aussi, dans tous les cas, on doit avoir

$$R'R''=\frac{a^2b^2c^2}{\Delta^4};\quad \text{d'où}\quad abc=\Delta^2\sqrt{(R'R'')}.$$

Mais nous avons fait voir dans le Mémoire déjà cité, sur la description des lignes et des surfaces du second degré (Journaux de l'École Polytechnique, tome VII, cahier XIV, note V, page 76), que le volume de tout ellipsoïde est équivalent à celui d'une sphère dont le diamètre a pour cube le produit des trois axes de l'ellipsoïde. La grandeur *abc*, et par conséquent aussi la grandeur $\Delta^2\sqrt{(R'R'')}$ est donc dans un rapport constant avec le volume de la surface du second degré, lorsqu'elle est un ellipsoïde. Mais en général, soit que la surface du second degré ait un ou deux de ses axes imaginaires, au lieu de les avoir tous réels, il faut les supposer réels pour avoir le volume du parallélepipède ayant les axes pour arêtes, et de l'ellipsoïde *inscrit* régulièrement dans ce parallélepipède. Alors on a indifféremment

$$\frac{4\pi}{3}.abc \quad \text{et} \quad \frac{4\pi}{3}.\Delta^2\sqrt{(R'R'')}$$

pour expression du volume de cet ellipsoïde.

Nous sommes donc conduits à ce résultat singulier, qu'il suffit de connaître le produit des deux rayons de courbure d'un ellipsoïde, et la distance de l'origine au plan tangent, pour connaître le volume du corps terminé par cette surface qui cependant, elle-même, est loin d'être déterminée par un si petit nombre d'éléments.

Revenons au cas général. *Les deux rayons de courbure*, ainsi que nous venons de le voir, *ont pour moyenne proportionnelle le produit des trois demi-axes, divisé par le quarré de la distance du centre au point où l'on considère la courbure de la surface du second degré.*

Si donc on compare entr'elles toutes les surfaces du second degré, telles que le volume du parallélepipède construit avec leurs axes comme arêtes, soit constant, on verra que pour tous les points de ces surfaces, où le plan tangent est équidistant du centre, le produit des deux rayons de courbure est nécessairement une quantité constante.

Par conséquent encore, en concevant qu'une sphère ayant un rayon quelconque, soit concentrique à la surface du second degré, les plans tangents en même temps à la sphère et à la surface, toucheront celle-ci en autant de points pour lesquels le produit des deux rayons de courbure est une quantité constante et qui ne dépendra que du rayon de la sphère et du volume de la surface ou de celui du parallélepipède formé sur ses axes comme arêtes.

En considérant deux surfaces du second degré concentriques, mais d'ailleurs d'une forme quelconque et n'ayant rien de commun pour l'une et pour l'autre, un plan tangent à la fois à ces deux surfaces, les touche en deux points tels que pour chacun le produit des deux rayons de courbure qui lui correspondent en particulier, est proportionnel au volume de la surface sur laquelle est ce point; ou du moins proportionnel au volume du parallélepipède formé par les axes de chaque surface.

De ces principes résulte encore une autre conséquence : Une surface non plus seulement du second degré, mais de la forme la plus générale, étant donnée, si l'on veut trouver une surface du second degré qui l'oscule en un point déterminé, et qui de plus ait son centre en un point pareillement déterminé ; on connaîtra les deux rayons R', R'' qui correspondent à ce point, la distance Δ du centre au plan tangent : on aura donc immédiatement le volume de la surface osculatrice, ou du moins celui du parallélepipède formé par les axes de cette osculatrice.

Par conséquent, si le centre de la surface osculatrice, varie et marche sur un plan parallèle au plan tangent, toutes les surfaces du second degré qu'on va former ainsi, seront égales en volume.

Et si le centre de la surface du second degré s'éloigne ou s'approche du plan tangent, le volume du corps terminé par cette surface croîtra ou décroîtra proportionnellement au quarré de la distance du centre au plan tangent.

Remarquons encore en passant, que dans ce dernier cas la surface de la section diamétrale faite dans l'osculatrice du second degré parallèlement au plan tangent que l'on considère ; cette superficie, dis-je, est directement proportionnelle à la distance de cette section et du plan tangent.

Je me suis étendu, à dessein, sur ces propriétés, parce qu'il ne paraît pas qu'on en ait encore présenté qui eussent avec elles aucune analogie, et qu'elles peuvent d'ailleurs devenir d'une application utile, but que nous ne voulons jamais perdre de vue.

On conçoit, en effet, que les petits segments des surfaces pouvant être remplacés par ceux de leurs osculatrices, et les segments des surfaces du second degré pouvant être facilement déterminés ; ces diverses propriétés trouveront leur application dans beaucoup

IIme MÉMOIRE. de travaux des Ingénieurs, où il faut considérer les volumes des corps terminés par des surfaces courbes.

Considérons maintenant la partie de la valeur des rayons de courbure, qui se trouve hors du radical; elle donne

$$R' + R'' = \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}.[(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)].$$

Dans cette équation, rappelons-nous que

$$\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} = \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \mathrm{D},$$

Δ étant toujours la distance du centre au plan tangent, $\mathfrak{A}$ la diagonale du parallélepipède des axes, et D la distance du centre au point de la surface auquel les deux rayons R′, R″ appartiennent. Nous avons donc aussi, comme nous l'avons déjà vu,

$$R' + R'' = \frac{\mathfrak{A}^2 - D^2}{\Delta}.$$

Cette équation nous apprend que la somme des deux rayons de courbure est égale à la différence des quarrés des diagonales de deux parallélepipèdes ayant respectivement les demi-axes a, b, c ou les coordonnées x, y, z pour arêtes, cette différence divisée par la distance du centre au plan tangent en x, y, z.

En combinant ce principe avec celui qui fait connaître le produit des rayons de courbure, on verra que pour obtenir immédiatement ces rayons, il suffira de connaître avec les axes, les distances D et Δ du centre au point donné et au plan tangent à la surface en ce point; car on aura de suite

$$R'R'' = \left(\frac{abc}{\Delta^2}\right)^2, \qquad R' + R'' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - D^2}{\Delta}.$$

Il nous semble difficile de réduire la question à de moindres termes.

La dernière de ces formules nous fait voir que si on coupe une surface du second degré par une sphère qui lui soit concentrique, pour tous les points d'intersection, la somme des rayons de courbure doit être réciproquement proportionnelle à la distance du centre au plan tangent.

Au contraire, si Δ au lieu de D, devait être constant, alors, ainsi que nous l'avons dit plus haut, R'R" serait constant, et l'on trouverait les points de la surface du second degré qui donnent tous pour R'R" une même valeur, en faisant mouvoir un plan tangentiellement à la surface et à la sphère du rayon Δ, qui lui est concentrique; pour tous ces points, la somme des rayons de courbure est proportionnelle à la différence des quarrés des diagonales des deux parallélepipèdes ayant respectivement pour arêtes les axes a, b, c, ou les coordonnées x, y, z.

Tirons enfin une dernière conséquence de l'inspection de l'équation

$$R' + R'' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - D^2}{\Delta}.$$

Etant donnés les deux rayons de courbure pour un point d'une surface quelconque, et de plus le centre de la surface osculatrice du second degré, si ce centre tourne autour de la normale passant par le point donné, comme autour d'un axe de rotation; à chaque position différente du centre, les trois axes de la surface osculatrice prendront une valeur particulière; mais dans toutes les variations dont ils seront susceptibles, la somme des quarrés de a, b, c ne variera pas.

Et si pendant ce mouvement on fait tourner la surface osculée autour de la même normale, mais d'une manière indépendante; alors à chaque position du centre de la surface osculatrice cherchée, correspondront une infinité de ces osculatrices du second degré; et toutes ces séries de surfaces auront pour caractère commun,

que la somme des quarrés des axes, prise dans chaque surface, ne cessera pas d'être la même (*).

Enfin, d'après ce que nous avons dit plus haut, on voit aussi que toutes ces surfaces osculatrices jouissent de cette autre propriété, que le produit de leurs trois axes est une grandeur constante. Il serait fastidieux de pousser plus loin ces considérations.

ARTICLE X.

Nouvelle méthode des tangentes.

Pour donner plus de rapidité à l'analyse de la courbure des surfaces, nous nous sommes servi de considérations infinitésimales, et des valeurs différentielles, qui leur appartiennent. Nous aurions pu prendre un moyen plus direct et qui eût rendu entièrement élémentaire la théorie des contacts du premier et du second ordre. Car la géométrie peut nous offrir un moyen d'obtenir immédiatement, et sans considérations infinitésimales, les équations des plans tangents, et par suite, celle des surfaces enveloppes, des surfaces mutuellement osculatrices, etc.

Si l'on réfléchit sur les diverses méthodes qu'on a successivement employées dans la recherche des tangentes, on verra qu'elles ont dû reposer sur de telles considérations. Comme on n'envisageait, en effet, que la ligne ou la surface individuelle à laquelle on voulait mener une tangente ou un plan tangent, il fallait,

(*) Si les deux rayons de courbure de la surface osculée, variaient à la fois de manière à ce que leur somme restât pourtant constante ; pour chaque nouvelle combinaison, on aurait une infinité de séries de surfaces osculatrices du second degré, dont les centres seraient à une distance constante de la normale et du plan tangent; or cette infinité d'infinités de surfaces osculatrices, jouirait toujours de la propriété commune, que la somme des quarrés des trois axes serait une grandeur constante pour toutes les surfaces.

outre le point de contact, avoir encore égard aux autres points de la ligne ou de la surface; c'est-à-dire, aux points immédiatement consécutifs à ce point de contact, ou à une distance infiniment petite, ou seulement moindre que toute grandeur donnée, ou à une distance qui s'évanouit.... Il est, comme nous venons de le dire, un autre moyen de s'élever à la détermination des tangentes et des plans tangents, sans recourir à ces diverses hypothèses, permises, parce qu'elles conduisent d'une manière simple à des résultats vrais, mais inexactes en elles-mêmes, et peu propres à la précision rigoureuse que des élèves doivent chercher à mettre dans les raisonnements de toutes leurs études. IIIme MÉMOIRE.

Ce moyen consiste à chercher un système de surfaces ou de lignes, dans lequel se trouvent à la fois ou la ligne, ou la surface que l'on considère, et sa tangente ou son plan tangent. Il est évident que s'il est possible d'obtenir l'équation d'un pareil système, au moyen d'une constante arbitraire; en donnant tour à tour à cette constante les valeurs particulières à la droite et au plan tangent, ou bien à la ligne et à la surface primitive. On obtiendra d'une part l'équation de la ligne courbe et de sa tangente; de l'autre, l'équation de la surface et de son plan tangent. Prenons le cas le plus général, et ne nous occupons que des plans tangents aux surfaces.

Sur une surface quelconque, concevons que du point x, y, z on ait mené des cordes à chacun des autres points x', y', z'. Ces cordes croissant ou diminuant toutes ensemble dans un même rapport, prennent une première, une seconde, une troisième..... valeur, et forment ainsi une première, une seconde, une troisième.... surface. Il est évident que toutes les surfaces qu'on formera ainsi seront semblables à la primitive, et semblablement placées dans l'espace; c'est-à-dire seront telles, que leurs lignes homologues seront à la fois proportionnelles et parallèles : donc

 aussi ces surfaces seront toutes tangentes à la primitive au point commun x, y, z. Tant que le rapport (α) des cordes homologues sera positif, ces cordes seront toutes du même côté du plan tangent en x, y, z à toutes les surfaces ; mais ces cordes seront de côtés opposés, lorsque ce rapport (α) deviendra négatif : donc, enfin, lorsque la quantité (α) aura la valeur déterminée zéro, l'équation générale sera celle du plan tangent à la surface au point que l'on considère.

Il est visible qu'ici nous dégageons la méthode des tangentes de toute considération infinitésimale. Nous ne tombons pas non plus dans la méthode des limites, parce que dans cette méthode, la grandeur limite est celle dont les grandeurs variables approchent sans cesse, mais sans pouvoir jamais l'atteindre ; au lieu qu'ici la grandeur particulière où nous nous arrêtons, peut être atteinte et même dépassée. D'ailleurs, il doit nous être aussi permis, dans notre équation générale, de faire $\alpha = 0$, qu'il peut l'être dans une équation telle que $\varphi(x, y, z) = 0$, d'y faire $\alpha = 0$.

Il est aisé de transporter dans l'analyse ce mode de génération que nous n'avons présenté si longuement qu'afin de prévenir toute objection : x, y, z étant toujours les coordonnées du point que l'on considère sur la surface, soient $x+\xi, y+\upsilon, z+\zeta$ les coordonnées d'un autre point en général, l'équation de la surface primitive étant

$$z+\zeta=\varphi(x+\xi, y+\upsilon),$$

celle du système de surfaces semblables cherché, sera

$$z+\alpha\zeta=\varphi(x+\alpha\xi, y+\alpha\upsilon),$$

qui, lorsqu'on y fera $\alpha=1$, deviendra l'équation même de la surface primitive ; cela est évident. Mais lorsqu'on fait $\alpha=0$ dans cette seconde équation, elle appartient d'abord au point x, y, z, et elle donne

$$z=\varphi(x, y):$$

donc on a
$$\zeta = \frac{\varphi(x+\alpha\xi, y+\alpha\upsilon) - \varphi(x,y)}{\alpha}.$$

Soit maintenant

$$(\Pi)\ldots\quad z+Z = A(x+X)+B(y+Y),$$

l'équation du plan qui touche à la fois en x, y, z toutes les surfaces du systême ; plan dont aucun des points n'appartenant ni aux valeurs positives de α, ni à ses valeurs négatives, et qui cependant faisant partie du systême général, doit correspondre à la valeur zéro de α. Observons, premièrement, que x, y; z appartenant nécessairement au plan tangent (Π), il faut qu'on ait

$$z = Ax + By,\quad \text{et par conséquent,}\quad Z = AX + BY.$$

Rendons à présent $\alpha = 0$ dans l'équation générale du systême de surfaces dérivées de la primitive ; alors ξ, υ, ζ se changeront en X, Y, Z, et on aura

$$Z = \frac{\varphi(x+\alpha\xi, y+\alpha\upsilon) - \varphi(x,y)}{\alpha} = AX + BY,$$

équation qui fait voir que pour obtenir A, il faudra supposer que dans $\varphi(x,y)$, x devienne $x+\alpha\xi$, ou simplement $x+h$, puis développer par rapport à h, retrancher de ce développement la grandeur primitive φ, diviser tout par h; et faire enfin $h=0$. Il est évident qu'alors tout ce qui restera du développement de φ en x, sera le coefficient de la première puissance de h, et c'est ce coefficient qui égale A. De même B sera le coefficient de la première puissance de k dans le développement de φ en k, lorsqu'on mettra $y+\alpha\upsilon$ ou simplement $y+k$ au lieu de y.

Si l'on suppose qu'au lieu de présenter immédiatement cette méthode pour les plans tangents, comme nous le faisons ici afin d'être plus rapides, on la développe d'abord pour les tangentes des lignes courbes planes ; puis qu'on l'applique au cercle et aux autres lignes du second degré, avant de la généraliser et de la transpor-

IIIme MÉMOIRE. ter aux surfaces, il me semble qu'elle sera susceptible de toute la simplicité et de toute la rigueur desirables.

Si l'on voulait désigner par les caractères reçus, les coefficients, desquels nous venons de voir que dépend la direction des tangentes ou des plans tangents, on représenterait par $\varphi'(x)$ ou $\frac{dz}{dx}$ la valeur $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$, lorsqu'on y fait $h=0$; et alors

$$z=\varphi(x, y)\ (*)$$

étant l'équation d'une ligne courbe,

$$z-z'=\varphi'(x)(x-x') \quad \text{ou} \quad z-z'=\frac{dz}{dx}(x-x')$$

serait l'équation de la tangente à cette courbe; mais si φ était à la fois fonction de x et de y, on ferait

$$\varphi'(y)=\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k},$$

lorsque $k=0$; enfin, on aurait

$$z-z'=\varphi'(x)(x-x')+\varphi'(y)(y-y'),$$

ou

$$z-z'=\frac{dz}{dx}(x-x')+\frac{dz}{dy}(y-y'),$$

ou, comme nous avons écrit jusqu'ici pour plus de simplicité,

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y'),$$

expressions dans lesquelles p, $\frac{dz}{dx}$ et $\varphi'(x)$; q, $\frac{dz}{dy}$ et $\varphi'(y)$ sont pour nous les coefficients différentiels partiels communs de l'équation du système général de surfaces que nous avons formé.

Lorsqu'on propose une équation

$$z=\varphi(x, y, a),$$

dans laquelle a est une constante arbitraire, à chaque valeur

(*) Lorsque y est regardé comme une constante.

particulière de a correspond une surface distincte. Ensuite, en considérant a comme une fonction de x et y, on obtient une surface essentiellement différente des premières, et si l'on veut que celle-ci et l'une de celles-là soient tangentes dans toute l'étendue de leur intersection, il faudra qu'on égale à zéro la partie $A'(x-x')+B'(y-y')$, que a supposé fonction de x et de y ajouterait à l'ordonnée Z du plan tangent; et l'équation

$$o=A'(x-x')+B'(y-y'),$$

ou, suivant la notation que nous venons d'indiquer, ses différentielles $\frac{dp}{da}$, $\frac{dq}{da}$ étant prises dans l'équation du premier ordre en regardant x, y, z comme constantes,

$$\frac{dp}{da}dx+\frac{dq}{da}dy=o,$$

serait l'équation qui ferait connaître la tangente trigonométrique $\frac{dy}{dx}$ appartenant à l'angle formé en chaque point x, y, par l'axe des x et la direction de la courbe cherchée; ce qui donnerait l'équation aux différentielles partielles de cette courbe que Monge a nommée *caractéristique*, et dont il a fait un grand usage.

Les lignes et les surfaces lieux des centres de courbure, sont de vraies enveloppes, et les équations des normales, immédiatement dérivées de celles des tangentes ou des plans tangents, donneraient facilement, par le moyen que nous venons d'indiquer, tout ce qui peut être relatif aux contacts du second ordre et à la courbure des surfaces : enfin, en suivant une marche absolument analogue, on s'éleverait aux ordres supérieurs.

NOTES PRINCIPALES

DU TROISIÈME MÉMOIRE.

NOTE PREMIÈRE.

Des rayons de courbures des paroboloïdes.

Si dans l'équation générale des surfaces du second degré rapportées à leur centre comme origine,

$$\left(\frac{\Sigma}{2}\right)\ldots\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

nous mettons $z+c$ pour z, nous transporterons l'origine à l'un des sommets placés sur l'axe des z, et nous aurons

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2z}{c}=0,$$

ou, en multipliant tous les termes par c,

$$\frac{c}{a^2}.x^2+\frac{c}{b^2}.y^2+\frac{z^2}{c}+2z=0.$$

Supposons maintenant que les trois axes a, b, c deviennent à la fois infinis, mais dans un rapport tel que $\frac{c}{a^2}=\frac{1}{A}$ et $\frac{c}{b^2}=\frac{1}{B}$ soient cependant des quantités finies, le terme $\frac{z^2}{c}$ s'évanouira seul, et il restera

$$\left[\frac{\Sigma}{2}\right]\ldots\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+2z=0.$$

C'est l'équation générale des paraboloïdes dont le sommet est pris pour origine, et l'axe pour axe des z.

Il suit de là, que si, des résultats que nous avons obtenus en parlant des surfaces du second degré qui ont un centre, nous voulons passer aux mêmes résultats relativement aux paraboloïdes, il faudra simplement faire a, b, c infinis, les rapports $\frac{c}{a^2}=\frac{1}{A}$, $\frac{c}{b^2}=\frac{1}{B}$ restant finis.

Appliquons cette méthode à la détermination des rayons de courbure ; nous avons trouvé pour cette valeur (art. VIII de ce Mémoire), IIIme MÉMOIRE.

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\times$$

$$\left\{\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)^2-a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}.$$

Mais cette même équation est évidemment identique avec celle-ci,

$$R=\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}+\frac{c^2z^2}{c^4}}\times$$

$$\left\{\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2c}\right)^2-\frac{a^2b^2}{c^2}\left(\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}+\frac{c^2z^2}{c^4}\right)}\right\}.$$

Mettant donc $z+c$ pour z, et réduisant comme nous venons de dire qu'il faut le faire, il vient pour l'expression des rayons du paraboloïde,

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1}\left\{\frac{A+B-2z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+B-2z}{2}\right)^2-AB\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1\right)}\right\}.$$

En suivant la marche ordinaire indiquée par la valeur générale des rayons de courbure en fonction des cofficients différentiels du premier et du second ordre, nous eussions pu parvenir directement à cette équation.

En effet,

$$\left[\begin{matrix}\Sigma\\2\end{matrix}\right]\ldots\ldots\qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+2z=0$$

donne immédiatement

$$\frac{dz}{dx}=p=-\frac{x}{A},\qquad \frac{dz}{dy}=q=-\frac{y}{B};$$

d'où

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)}=\sqrt{\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1\right)}.$$

Ensuite

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r=-\frac{1}{A},\qquad \frac{d^2z}{dxdy}=s=0,\qquad \frac{d^2z}{dy^2}=t=-\frac{1}{B};$$

d'où

$$rt-s^2=\frac{1}{AB}.$$

Combinant ces valeurs, on trouve

$$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=-\left(1+\frac{x^2}{A^2}\right)\frac{1}{B}-\left(1+\frac{x^2}{B^2}\right)\frac{1}{A}=-\frac{A+B-2z}{AB},$$

IIIme MÉMOIRE. Donc enfin, on aura généralement pour tous les paraboloïdes;

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(rt-s^2)}=-\frac{A+B-2z}{2}$$

et

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}=AB\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1\right)^2.$$

Par conséquent aussi,

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1}\left\{\frac{A+B-2z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+B-2z}{2}\right)^2-AB\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1\right)}\right\}.$$

Or, telle est la valeur que nous venons de trouver.

Remarquons maintenant dans cette équation, que $\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1}$ étant la valeur inverse du cosinus de l'angle formé par le plan tangent avec le plan des x, y, l'autre facteur

$$\frac{A+B-2z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+B-2z}{2}\right)^2-AB\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+1\right)}$$

est égal à la portion de l'axe des z qui, suivant le signe $\pm$, est la projection de l'un ou l'autre rayon de courbure.

La somme de ces deux portions de l'axe est donc donnée par cette expression très-simple

$$A+B-2z,$$

dans laquelle A, B sont les demi-paramètres des deux *paraboles principales*. Ensuite le produit des deux rayons de courbure est égal au produit des deux demi-paramètres, divisés chacun par le quarré du même cosinus, c'est-à-dire, du cosinus de l'angle formé par la normale et l'axe des z.

Si donc un plan tangent au paraboloïde et mobile, fait constamment le même angle avec l'axe des z, pour tous les points de contact qui correspondront à ses diverses positions, le produit des deux rayons de courbure sera constant; et alors la somme des rayons croîtra ou décroîtra proportionnellement à l'ordonnée z du point de contact.

Enfin, pour toutes les sections faites dans un paraboloïde parallèlement à sa base, la somme des deux rayons de courbure est réciproquement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la normale avec l'axe des z.

NOTE II.

De l'indicatrice des paraboloïdes.

Nous venons de voir que l'équation générale des paraboloïdes rapportés à leur sommet comme origine, et à leurs plans principaux comme plans coordonnés, étant

$$\left[\begin{matrix}\Sigma\\2\end{matrix}\right]\ldots\ldots \qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+2z=0$$

on a pour les coefficients différentiels du second ordre,

$$r=-\frac{1}{A}, \quad s=0, \quad t=-\frac{1}{B}:$$

donc dans les mêmes hypothèses, l'équation des indicatrices des paraboloïdes est

$$\left[\begin{matrix}i\\2\end{matrix}\right]\ldots\ldots \quad \frac{1}{A}(X-x)^2+\frac{1}{B}(Y-y)^2=C.$$

Or j'observe que les coefficients de $X-x$ et $Y-y$ ne contiennent ni x ni y; ils resteront donc les mêmes, quelles que soient ces coordonnées; d'où résulte ce théorème remarquable: « Dans tout paraboloïde du second degré (elliptique ou hyperbolique), les indicatrices de la courbure se projettent toutes sur un plan perpendiculaire à l'axe, suivant des courbes semblables et semblablement placées, c'est-à-dire, qui ont leurs lignes homologues parallèles. »

Mais nous savons (art. I) que chaque indicatrice peut être considérée comme la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent, et qui d'ailleurs en soit infiniment voisin; de plus, toutes les sections faites dans une surface du second degré par des plans parallèles, sont semblables et semblablement placées dans l'espace. Donc aussi, pour un même plan de projection quel qu'il soit, les projections des sections faites par des plans quelconques seront semblables aux projections des indicatrices dont le plan leur est parallèle. Mais sur le plan perpendiculaire à l'axe, toutes les indicatrices du paraboloïde se projettent suivant des courbes semblables, et dont les axes sont parallèles :

« Donc toutes les courbes planes qu'on peut concevoir sur un paraboloïde, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, sont des courbes semblables, et semblablement placées sur ce plan, c'est-à-dire qu'elles ont leurs lignes homologues parallèles. Enfin, la même propriété aurait lieu encore, pourvu que la projection se fît parallèlement à l'axe, mais d'ailleurs sur un plan quelconque. »

FIN DES NOTES DU TROISIÈME MÉMOIRE.

SUPPLÉMENT

A L'ARTICLE IV DU PARAGRAPHE PREMIER

DU SECOND MÉMOIRE.

Osculation des courbes tracées sur des surfaces qui sont en contact suivant une ligne quelconque.

En exposant les propriétés du contact des surfaces et de celui de leurs sections, (premier Mémoire, page 34 et suivantes; second Mémoire, page 83 et suivantes), nous n'avons pas donné aux théorêmes que nous avons exposés, tout le développement dont ils sont susceptibles : nous croyons devoir le faire ici.

Lorsque deux surfaces ont dans toute l'étendue d'une ligne courbe un contact de l'ordre m, un plan tangent à cette courbe et qui coupe les deux surfaces, y produit deux sections qui n'ont pas seulement entr'elles un contact *immédiatement* supérieur à m, mais immédiatement supérieur au double de m. Voilà ce que nous allons démontrer généralement.

Prenons sur la ligne de contact des deux surfaces, les deux points immédiatement consécutifs x, y, z, et $x+dx, y+dy, z+dz$; si nous supposons que les deux équations de cette courbe de contact, sont

$$y=\mathrm{f}(x), \quad z=f(x),$$

nous aurons pour équations de sa tangente au point x, y, z,

$$(\theta)\ldots \quad Y-y=\mathrm{f}'.(X-x), \quad Z-z=f'.(X-x),$$

et cette équation pour le point $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, deviendra

$$(\theta')\ldots \quad Y-y-dy=(\mathrm{f}'+d\mathrm{f}')(X-x-dx), \quad Z-z-dz=(f'+df')(X-x-dx).$$

Donc au point où cette dernière droite rencontre le plan

$$X-x=0,$$

mené par le point x, y, z, perpendiculairement à l'axe des x, on a

$$[\theta']\ldots \quad Y-y-dy=(\mathrm{f}'+d\mathrm{f}')\,dx, \quad Z-z-dz=(f'+df')\,dx,$$

équations qui, en vertu des équations mêmes de la courbe de contact, se

réduisent à

$$Y - y = df'.dx = f''.dx^2, \qquad Z - z = df'.dx = f''.dx^2.$$

Ces équations nous apprennent d'abord que la distance du second point au point x, y, z pris sur les deux surfaces, est une distance infiniment petite du second ordre ; puisque, à cause de $X - x = 0$, elle est exprimée ainsi

$$\sqrt{[(Y-y)^2 + (Z-z)^2]} = dx^2 \sqrt{(f''^2 + f''^2)}.$$

Maintenant, faisons passer un plan quelconque par la tangente (θ') ; ce plan tracera sur le plan $X - x = 0$, une droite dont l'équation peut être mise sous cette forme

$$(t) \ldots \qquad Z - z - f''.dx^2 = m(Y - y - f''.dx^2),$$

puisque cette droite doit passer par x, $y + f''.dx^2$, $z + f''.dx^2$ point de la droite (θ') placé sur le plan $X - x = 0$.

Maintenant soient

$$z = \varphi(y), \quad z = \Phi(y),$$

les équations des sections faites dans les deux surfaces proposées par le plan unique $X - x = 0$; ces équations, comme on voit, ne sont autre chose que celles mêmes de ces surfaces, en y regardant seulement la variable x comme une constante égale à X.

Cherchons l'intersection de la première courbe $z = \varphi(y)$, avec la droite dont nous venons d'obtenir l'équation

$$Z - z - f''.dx^2 = m(Y - y - f''.dx^2).$$

Soient $y + h$ et $z + k$ les valeurs de Y et Z qui appartiennent au point d'intersection cherché. Par cette hypothèse, l'équation précédente donnera

$$k = mh + (f'' - mf'')\, dx^2.$$

Mais l'équation $z = \varphi(x)$ donne

$$k = \varphi'.h + \varphi''.\frac{h^2}{1.2} + \varphi''' \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

en combinant ces deux équations, on trouve immédiatement

$$(f'' - mf'')\, dx^2 = (\varphi' - m)\, h + \varphi'' \frac{h^2}{1.2} + \varphi''' \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Le premier membre de cette équation étant infiniment petit du second ordre ; lorsque dx est infiniment petit du premier, il faut alors, si h est aussi du premier ordre, que $\varphi' = m$, ce qui serait rendre la droite que nous considérons, tangente à la première surface. Nous exclurons cette hypothèse, et nous suppo-

 serons que la droite et cette surface se coupant sous un angle fini quelconque, m et φ' sont par conséquent deux quantités différentes.

Mais si φ' et m sont différents l'un de l'autre, pour que le second membre de l'équation précédente soit un infiniment petit du second ordre, il faut que h soit lui-même un infiniment petit du second ordre, dx étant du premier.

Donc, dans ce cas, on peut toujours faire $h=\alpha.dx^2$, α étant une quantité finie.

Si maintenant, à la courbe $z=\varphi(y)$ qui appartient à la première surface, nous substituons la courbe $z=\Phi(y)$ qui appartient à la seconde, nous aurons de même, en prenant $y+\mathrm{H}$ et $z+\mathrm{K}$ pour les coordonnées du point où cette courbe est rencontrée par la droite (t),

$$(f''-mf'')\,dx^2=(\Phi'-m)\,\mathrm{H}+\Phi''\frac{\mathrm{H}^2}{1.2}+\Phi'''\frac{\mathrm{H}^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

mais les deux courbes φ et Φ étant tangentes en x, y, z, $\varphi'=\Phi'$; or φ' est différent de m : donc m et Φ' sont inégaux; donc en vertu de l'équation précédente, nous aurons aussi $\mathrm{K}=\mathrm{A}dx^2$, A étant une quantité finie : donc, en mettant cette valeur dans l'équation précédente, et $\alpha.dx^2$ pour k dans l'équation donnée par la première courbe, il viendra

$$k=\varphi'\frac{\alpha.dx^2}{1}+\varphi''\frac{\alpha^2.dx^4}{1.2}+\varphi'''\frac{\alpha^3.dx^6}{1.2.3}+\text{etc.},$$

$$\mathrm{K}=\Phi'\frac{\mathrm{A}.dx^2}{1}+\Phi''\frac{\mathrm{A}^2.dx^4}{1.2}+\Phi'''\frac{\mathrm{A}^3.dx^6}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Or, $z+k$ est l'ordonnée du point intersection de la trace (t) et de la première courbe $z=\varphi(x)$: c'est donc un point de l'intersection de la première surface et du plan coupant. Mais $x-dx$ est l'abscisse du point où la tangente (θ') touche les deux surfaces, et ce point est sur le plan coupant, puisque (θ') y est tout entière. D'ailleurs, la courbe de contact ayant pour équation en x et z,

$$z=f(x),\quad \text{donne}\quad dz=f'.dx.$$

Donc enfin, pour la courbe tracée par le plan coupant sur la première surface, lorsque x devient $x\pm dx$, la différentielle de z est $k\pm f'.dx$.

Ainsi l'équation de la première courbe d'intersection est immédiatement,

$$dz=f'dx+\varphi'.\frac{\alpha.dx^2}{1}+\varphi''.\frac{\alpha^2.dx^4}{1.2}+\varphi'''.\frac{\alpha^3.dx^6}{1.2.3}+\text{etc.}$$

de même,

$$dz=f'dx+\Phi'.\frac{\mathrm{A}.dx^2}{1}+\Phi''.\frac{\mathrm{A}^2.dx^4}{1.2}+\Phi'''.\frac{\mathrm{A}^3.dx^6}{1.2.3}+\text{etc.}$$

est l'équation de la seconde courbe d'intersection. Voyons maintenant quel est le rapprochement de ces deux courbes.

La fonction f étant indépendante des fonctions φ et Φ, nous voyons d'abord que, quelles que soient ces deux fonctions, et par conséquent quel que soit l'angle formé par deux surfaces qui se coupent, tout plan tangent à leur intersection coupe ces deux surfaces suivant deux courbes tangentes. IIme MÉMOIRE.

Avant de pousser plus loin cet examen, déterminons les valeurs de a et A.

Pour cela, reprenons les équations

$$(f''-mf'')\,dx^2=(\varphi'-m)\frac{h}{1}+\varphi''\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

$$(f''-mf'')\,dx^2=(\Phi'-m)\frac{H}{1}+\Phi''\frac{H^2}{1.2}+\Phi'''\frac{H^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Elles donneront, par le retour des suites, deux séries de la forme

(1).... $h=adx^2+bdx^4+cdx^6+\text{etc.},$

(2).... $h=Adx^2+Bdx^4+Cdx^6+\text{etc.},$

dans lesquelles on aura

$$a=\frac{f''-mf''}{\varphi'-m},\qquad A=\frac{f''-mf''}{\Phi'-m}.$$

Donc l'une des équations suivantes entraînera toujours l'autre :

$$a=A,\qquad \varphi'=\Phi'.$$

Maintenant, revenons aux deux développements qui appartiennent aux deux intersections dont nous voulons apprécier le rapprochement.

Supposons d'abord que les deux surfaces ont simplement dans toute l'étendue de la courbe qui leur est commune, un contact du premier ordre; alors on aura pour tous les points de cette courbe,

$$\varphi'=\Phi'\qquad\text{donc aussi,}\qquad a=A;$$

et les deux développements deviendront

$$dz=f'dx+\varphi'.(a+bdx^2+\ldots)\frac{dx^2}{1}+\varphi''(a+bdx^2+\ldots.)^2\frac{dx^4}{1.2}+\text{etc.};$$

$$dz=f'dx+\Phi'.(a+Bdx^2+\ldots)\frac{dx^2}{1}+\Phi''(a+Bdx^2+\ldots.)^2\frac{dx^4}{1.2}+\text{etc.};$$

d'où il suit que dx étant une quantité du premier ordre, les deux dz ne pourront différer qu'à partir des termes

$$\varphi'.b\frac{dx^4}{1},\qquad \Phi'.B\frac{dx^4}{1},\qquad \varphi''.\frac{a^2dx^4}{1.2},\qquad \Phi''.\frac{a^2dx^4}{1.2}.$$

Donc elles ne pourront différer de quantités plus grandes que le quatrième ordre, et par conséquent, elles auront entr'elles un contact du *troisième* ordre.

Ainsi, lorsqu'un cylindre est circonscrit à la sphère, un plan quelconque tangent

IIme MÉMOIRE. à leur courbe de contact, coupe la sphère suivant un cercle qui n'est pas seulement osculateur de l'ellipse section du cylindre, mais qui a un contact du *troisième* ordre avec cette ellipse.

Supposons maintenant qu'on ait

$$\varphi' = \Phi', \quad \varphi'' = \Phi'', \quad \varphi''' = \Phi''' \dots \quad \text{jusqu'à} \quad \varphi^m = \Phi^m.$$

Par cette condition les m premiers coefficients des développements (1) et (2) seront identiques. Nommant donc p et P les deux coefficients du rang $m+1$, les premiers termes par lesquels les dz des deux développements puissent différer, seront

$$(p-P)\,dx^{2(m+1)} + (\varphi^{m+1} - \Phi^{m+1})\frac{a^{m+1}dx^{2(m+1)}}{1.2\dots m+1};$$

donc les deux sections auront entr'elles un contact de l'ordre $2(m+1)-1$.

Si, par exemple, les deux surfaces ont dans toute l'étendue de leur courbe de contact un rapprochement du second ordre, tout plan qui les coupera tangentiellement à cette courbe, y tracera deux sections qui auront au même point un rapprochement du *cinquième* ordre.

Si le plan coupant, au lieu d'avoir une position quelconque par rapport à la courbe de contact, était son plan osculateur, alors h et H, au lieu d'être des infiniment petits du second ordre, seraient des infiniment petits du troisième : il faudrait donc mettre $a.dx^3+bdx^6+\dots$, au lieu de $a.dx^2+bdx^4+\dots$; alors on aurait

$$dz = f'dx + \varphi'.(a+bdx^3+\dots)\frac{dx^3}{1} + \varphi''(a+bdx^3+\dots)^2\frac{dx^6}{1.2} + \text{etc.}$$

$$dz = f'dx + \Phi'(a+Bdx^3+\dots)\frac{dx^3}{1} + \Phi''(a+Bdx^3+\dots)^2\frac{dx^6}{1.2} + \text{etc.};$$

et dans cette nouvelle hypothèse, si on avait

$$\varphi' = \Phi'; \quad \varphi'' = \Phi'', \text{ etc. jusqu'à } \varphi^m = \Phi^m;$$

le premier terme de la différence des dz serait de la forme

$$(p-P)\,dx^{3(m+1)} + (\varphi^{m+1} - \Phi^{m+1})\frac{a^{m+1}dx^{3(m+1)}}{1.2\dots m+1}.$$

Donc les deux surfaces auraient entr'elles un contact de l'ordre $3(m+1)-1$.

De là résulte ce théorême très-simple : lorsque deux surfaces ont, suivant toute une ligne courbe, un rapprochement du *premier* ordre, tout plan osculateur de

cette courbe trace sur les surfaces, deux sections qui ont entr'elles un rapprochement du *cinquième* ordre.

Enfin, pour passer au cas le plus général, supposons que la surface coupante, au lieu d'être un plan, soit quelconque, et qu'elle ait un rapprochement de l'ordre n avec la courbe de contact des deux surfaces données. Et pour ne rien laisser à desirer, employons pour ce cas qui renferme tous les précédens, la méthode générale des fonctions analytiques.

Soient a, b, c les coordonnées du point de la courbe de contact, par lequel passe la surface coupante. Soient $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$ les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, dont les deux équations soient

$$(\mathrm{C})\ldots\qquad b+\beta=\mathrm{f}(a+\alpha),\qquad c+\gamma=f(a+\alpha)$$

Soient $a+\alpha$, $b+\beta+h$, $c+\gamma+k$ les coordonnées de la section faite par le plan $x=a+\alpha$ dans la première surface coupée, cette section aura pour équation

$$\varphi(c+\gamma+k)=(b+\beta+h).$$

La seconde surface coupée aura de même pour équation

$$\Phi(c+\gamma+k)=(b+\beta+\mathrm{H}),$$

H étant l'ordonnée de cette seconde section pour l'accroissement k commune aux deux sections faites par le plan $x=a+\alpha$, normale à l'axe des x.

Soient maintenant $a+\alpha$, $b+\beta+\mathrm{h}$, $c+\gamma+\varkappa$ les coordonnées de la surface coupante; on aura de suite pour cette surface une équation de cette forme

$$c+\gamma+\varkappa=\psi(a+\alpha,\ b+\beta+\mathrm{h});$$

exprimons d'abord que cette surface et la courbe $b+\beta=\mathrm{f}(a+\alpha)$, $c+\gamma=f(a+\alpha)$ ont un contact de l'ordre n. Mettant dans l'équation de la surface, $\mathrm{f}(a+\alpha)$ pour $b+\beta$, j'ai

$$c+\gamma+\varkappa=\psi[a+\alpha,\ \mathrm{f}(a+\alpha)+\mathrm{h}];$$

si nous faisons $\mathrm{h}=0$, nous resterons sur l'intersection de la surface et du cylindre ayant $b+\beta=\mathrm{f}(a+\alpha)$ pour base, tandis que ses arêtes sont parallèles à l'axe des z. Or, il faudra que cette section et la courbe (C) aient un contact de l'ordre n. Faisant donc $\psi[\alpha,\ \mathrm{f}(\alpha)]=\omega(\alpha)$, et comparant les développements

$$\text{de } f\ldots\qquad \gamma=\alpha f'(a)+\frac{\alpha^2}{1.2}f''(a)+\frac{\alpha^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots,$$

$$\text{de } \omega\ldots\qquad \gamma+\varkappa=\alpha\omega'(a)+\frac{\alpha^2}{1.2}\omega''(a)+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\omega'''(a)+\ldots,$$

IIme MÉMOIRE. Il faudra qu'on ait

$$f' = \alpha', \quad f'' = \alpha'' \ldots\ldots f^{(n)} = \alpha^{(n)}.$$

Donc $$x = (\alpha^{(n+1)} - f^{(n+1)}) \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots\overline{n+1}} + \text{etc.}$$

x étant la distance du point $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$ à la surface coupante, cette distance mesurée sur l'ordonnée z parallèle à l'axe des z.

Maintenant, lorsqu'on voudra trouver l'intersection de la surface coupante et de la courbe $\varphi(c + \gamma + k) = b + \beta + h$, il faudra supposer dans l'équation $x = (\alpha^{(n+1)} - f^{(n+1)}) \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots\overline{n+1}}$, que f $(b+\beta)$ devienne f $(b+\beta) + h$, et alors x devenant $x + \bar{x} = k$ sera toujours de la forme

$$(\alpha^{(n+1)} - f^{(n+1)}) \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots\overline{n+1}} + \text{etc.}\ldots,$$

c'est-à-dire, que α^{n+1} sera toujours la moindre puissance de α qui puisse entrer dans k.

Soit donc $k = \Omega\alpha^{n+1}$; développant $(b + \beta + h) = \varphi(c + \gamma + k)$, on a

$$h = \varphi'(c+\gamma) \frac{\Omega\alpha^{n+1}}{1} + \varphi''(c+\gamma) \frac{\Omega^2\alpha^{2(n+1)}}{1.2} + \text{etc.}$$

et de même, en comparant la seconde surface avec la surface coupante,

$$\text{H} = \Phi'(c+\gamma) \frac{(\Omega)\alpha^{n+1}}{1} + \Phi''(c+\gamma) \frac{(\Omega)^2\alpha^{2(n+1)}}{1.2} + \ldots$$

Pour reconnaître maintenant le rapprochement des courbes exprimées par ces deux équations, observons que Ω et (Ω), lorsqu'on y fait $\alpha = 0$, deviennent $\frac{\alpha^{(n+1)} - f^{(n+1)}}{1.2\ldots\ldots\overline{n+1}}$. Donc, en se bornant aux moindres puissances de α, la partie O de Ω et de (Ω) qu'il faudra considérer, sera la même. Mais si les deux surfaces proposées ont un rapprochement de l'ordre m, il faut qu'on ait $\varphi' = \Phi' \ldots \varphi^m = \Phi^m$; donc

$$[\varphi^{(m+1)}(c+\gamma) - \Phi^{(m+1)}(c+\gamma)] \frac{(O\alpha^{n+1})^{m+1}}{1.2.3\ldots\overline{m+1}}$$

sera la moindre puissance de l'accroissement α dans la différentielle des ordonnées des deux sections. Donc, *ces deux sections ont au point* a, b, c, *un contact de l'ordre*

$$(n + 1)(m + 1) - 1.$$

Si, par exemple, $n = 1$, $m = 1$, les deux sections auront un contact du *troisième* ordre : c'est ce que nous avions déjà démontré.

(FIN DE LA PREMIÈRE SECTION.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE.

DE LA COURBURE

ET

DE L'OSCULATION DES SURFACES.

SECONDE SECTION.

DE LA COURBURE CONSIDÉRÉE SUR TOUTE L'ÉTENDUE DES SURFACES.

50

Les deux Mémoires qui composent cette seconde Section, ont été présentés le 1er février 1813, à la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut de France; et dans sa Séance du 8 mars 1813, elle les a jugés, comme les précédents, dignes de son approbation, et d'être insérés dans le Recueil des Savans étrangers.

En 1809, le dernier de ces Mémoires avait été déposé à l'Institut Royal de Naples, qui mit l'auteur au nombre de ses Associés étrangers.

DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE.

QUATRIÈME MÉMOIRE.

GÉOMÉTRIE PURE.

PARAGRAPHE PREMIER.

Propriétés générales des surfaces trajectoires orthogonales, relatives à la courbure des surfaces.

Considérations générales.

La première partie de ces recherches avait principalement pour but d'envisager les surfaces dans la forme de leur courbure, en chaque point considéré isolément, et, pour ainsi dire, indépendamment de toutes les autres. Nous avons vu que dès l'instant où le nombre des données est suffisant pour que cette forme en un seul point soit complettement déterminée, il est toujours possible et même facile d'obtenir chacun des éléments qui la constituent et la particularisent, à partir de ce point. Enfin, nous avons vu que la simple discussion des lignes courbes du second degré,



 conduit à la solution complette des problêmes de ce genre; c'est-à-dire, de tous ceux où les données et les inconnues sont des quantités dépendantes de la courbure des surfaces en un point.

Les questions où les grandeurs graphiques à déterminer, n'appartiendraient pas seulement à des points individuels, mais à la surface toute entière; ces questions, dis-je, seraient infiniment plus difficiles à résoudre que les premières. Les solutions ne pourraient plus être constamment les mêmes pour tous les cas; elles changeraient dans leur nature, comme les surfaces dans le genre de leurs formes. Nous savons actuellement, par exemple, qu'il est toujours facile de déterminer pour quelque point que ce soit d'une surface donnée, la direction de ses lignes de courbure, et la grandeur des courbures principales, estimées suivant ces lignes. Mais si l'on voulait obtenir simultanément tous les points d'une de ces mêmes lignes, la géométrie ne pourrait plus nous offrir de méthode que dans chaque cas particulier où la nature de la surface serait connue; elle se refuserait constamment à résoudre des questions plus générales: enfin, il serait impossible de réduire les solutions à des méthodes universelles qui, par la variation successive des éléments qu'elles embrassent, puissent devenir également applicables à toutes les formes particuliéres de l'étendue.

On se tromperait en croyant que la géométrie, dans ses moyens de procéder à la recherche de la vérité, doit avoir des bornes posées seulement par la nature de cette science, et non par la nature même des choses. On se tromperait également en croyant ces bornes moins reculées que celles où l'analyse peut atteindre en marchant vers le même but. Ces deux méthodes sous des formes différentes, sont les développements identiques d'une seule et même science qui soumet à la fois toutes les grandeurs à ses combinaisons, à ses rapprochements. L'une, sans jamais perdre de vue les choses mêmes qu'elle doit considérer, porte partout l'évidence avec

elle; elle rend sensibles toutes ses conceptions, toutes ses opérations, et les grandeurs graphiques sont pour elle un moyen de peindre dans l'espace, et sa marche et ses résultats. L'autre substitue aux quantités dont elle s'occupe, des lignes purement abstraites; elle dépouille les grandeurs de tout ce qui n'est pas inhérent aux relations qu'elle envisage; elle ramène tout à des lois générales; elle représente les objets par des symboles qui les remplacent; elle est une langue : elle parle, qu'on me passe l'expression, elle parle et elle exprime tout ce que pense ou conçoit la première; et ces deux marches si différentes ont l'une par rapport à l'autre, les mêmes avantages et les mêmes désavantages que la pensée relativement à la parole. En fixant les idées par des signes, l'une soulage l'intelligence dont elle double par là les forces à chaque pas : c'est ainsi qu'elle est, qu'elle sera toujours le véritable instrument des grandes découvertes. Mais souvent par le secours de l'autre méthode, on pressentira les vérités nouvelles, et d'une seule conception on ira trouver ce qu'on atteindra plus tard que par de longues formules; souvent aussi cette vue anticipée amènera dans les calculs l'élégance et la facilité.

Quoi qu'il en soit, si la géométrie ne peut pas s'élever à des questions d'un certain ordre, l'analyse doit donc également se trouver insuffisante pour atteindre à leur solution. Ainsi, de même que la géométrie ne peut pas offrir de moyens généraux pour décrire complettement les lignes de courbure des surfaces supposées quelconques, l'analyse ne présentera pas non plus de méthode qui s'étende à la fois aux surfaces de tous les genres, et qui puisse offrir, dans tous les cas, l'équation immédiate de leurs lignes de courbure. Cette équation, effectivement, ne pouvant être obtenue que par l'intégration de fonctions dépendantes de la forme qu'affecte la surface, l'intégration demeure impossible tant que la surface, et par conséquent ces fonctions ne cessent pas d'être générales et

indéterminées. Pour les mêmes raisons, encore, comme il ne s'ensuit pas de ce qu'une surface est d'un genre déterminé, qu'il est possible à la géométrie de construire ses lignes de courbure, la même restriction doit être imposée à l'étendue des résultats analytiques. Dans tous les cas où cela sera possible à la première de ces deux sciences, celle-ci pourra s'élever à l'équation générale des lignes de courbure; dans tous les autres cas, il ne lui sera pas possible d'obtenir cette équation.

En considérant ainsi l'analyse et la géométrie dans leurs rapports, ces deux sciences s'éclaireront mutuellement, et chacune d'elles s'accroîtra de tous les progrès de l'autre. Dans les questions qui nous occupent, par exemple, chaque espèce nouvelle de fonctions que l'analyse saura soumettre à ses intégrations, fera connaître les lignes de courbure d'autant de familles différentes de surfaces; et chaque nouvelle classe de surfaces dont la géométrie pourra déterminer les lignes de courbure, conduira dans l'analyse à l'intégration d'autant de genres différents de fonctions.

Ne rejetons donc aucun de ces moyens pour procéder à la recherche de la vérité; jugeons-les utiles l'un et l'autre, et cherchons dans chaque cas le plus avantageux; et puisque, dans le sujet que nous traitons, l'analyse ne nous donnerait pas ce que la géométrie ne pourrait obtenir, continuons encore à suivre la méthode qui nous a servi d'abord, et voyons jusqu'où elle est susceptible de nous conduire; nous reprendrons ensuite la méthode des calculs.

Si pour quelque surface que ce soit, nous pouvions établir entre les grandeurs graphiques de tous les points d'une même ligne de courbure, des relations générales et constantes; quoique ces relations fussent nécessairement insuffisantes pour la détermination absolue de cette ligne, ce serait cependant un pas de fait dans la recherche de sa forme : on aurait d'autant plus limité la classe des courbes parmi lesquelles doivent se trouver les lignes de cour-

bure, on n'aurait plus à considérer que les espèces soumises aux relations déjà trouvées.

Nous allons présenter un théorême général également applicable à tous les genres de surfaces, et qui, dans tous les cas, nous offrant une infinité de moyens différents pour procéder à la détermination des lignes de courbure, permet, en choisissant le plus avantageux, de parvenir, par la voie la plus facile, au résultat qu'on se propose.

Théorême fondamental sur les surfaces trajectoires orthogonales.

Que l'on conçoive une courbe quelconque tracée dans l'espace, et par chaque point (1, 2, 3) de cette courbe, trois surfaces arbitraires (S_1), (S_2), (S_3), fig. 1.

Si chaque surface (S_1) et chaque surface (S_2) se coupent à angle droit dans toute l'étendue de leur intersection; si pareillement chaque surface (S_1) est coupée à angle droit par chaque surface (S_3), et de même, chaque surface (S_2) par chaque surface (S_3), aussi à angle droit, dans tous les points d'intersection de ces surfaces de différents systêmes : si, en un mot, les surfaces (S_1), (S_2), (S_3) forment ensemble un système de *trajectoires orthogonales*, *chaque surface* (S_1) *sera coupée par toutes les surfaces* (S_2) *suivant les différentes lignes d'une de ses courbures, et elle sera coupée par toutes les surfaces* (S_3) *suivant les différentes lignes de la seconde courbure. De même, chaque surface* (S_2) *sera coupée par les* (S_1) *et les* (S_3)*; chaque surface* (S_3) *le sera par les* (S_1) *et les* (S_2)*, suivant ses lignes de première et de seconde courbure :* enfin ce théorême aura lieu, *quelles que soient les relations des divers systêmes entr'eux, quelles que soient les lois qui lient entr'elles les surfaces d'un même systême, quelle que soit chaque surface des trois systêmes d'*orthotomides (voyez la note I).

Les lignes trajectoires sont toujours les lignes de courbure des surfaces trajectoires orthogonales ou des *orthotomides*.

En supposant vrai ce théorême, on doit voir quelle peut être son utilité dans la recherche des lignes de courbure des surfaces.

IV

IVe MÉMOIRE. Il suffira, pour connaître ces lignes, de trouver un seul système de trajectoires orthotomides, où soit comprise la surface que l'on considère ; car en déterminant alors les intersections de cette surface avec celles qui lui sont partout normales, ces intersections seront les lignes mêmes cherchées.

Utilité de ce principe. C'est réduire en analyse une intégration à une élimination, et il est inutile de dire quelle différence existe entre les difficultés de ces deux opérations. Sans doute il restera toujours à déterminer ces systèmes généraux de surfaces trajectoires orthogonales ; mais cette question étant d'une autre nature que celle de la recherche immédiate des lignes de courbure, on conçoit qu'il y aura des cas où cette recherche directe sera plus facile ; alors il faudra tout simplement y recourir : tandis qu'il y aura d'autres cas où la méthode ordinaire sera la moins avantageuse ; alors il faudra l'abandonner pour se servir du moyen que nous proposons. Il ne faut pas qu'on dise que si l'intégration de l'équation aux lignes de courbure est impossible, la détermination d'un système de trajectoires orthogonales qui donnerait ces lignes, est impossible aussi. Dès qu'une surface existe, ses lignes de courbure existent pareillement ; quand on n'en obtient pas l'équation, cela signifie seulement que les méthodes connues sont insuffisantes ; et comme chaque surface individuelle est comprise dans une infinité de systèmes de trajectoires orthogonales, qui tous donnent les lignes de courbure cherchées, on conçoit qu'on peut trouver un de ces systèmes, et cette découverte conduit à l'intégration d'un nouveau genre de fonctions : ce sont deux services pour un, rendus à la science par ce moyen de procéder à la recherche de la vérité. Mais nous reviendrons encore sur l'application que nous proposons, lorsque nous aurons démontré le théorème que nous avons avancé.

Sa démonstration. Considérons pour un moment une seule surface dans chaque

groupe des (S_1), des (S_2) et des (S_3), et représentons par $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ les courbes orthotomiques suivant lesquelles se coupent les surfaces (S_1) et (S_2), (S_2) et (S_3), (S_3) et (S_1). Cela posé, cherchons quelles relations les directions de ces courbes d'intersection $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ peuvent avoir au point $(1, 2, 3)$ qui leur est commun à toutes trois.

Si par $(1, 2, 3)$, fig. 2, nous menons le plan tangent à (S_1), et qu'à une distance infiniment petite du premier ordre, nous menions à ce plan, le plan parallèle (π), celui-ci coupera la courbe $(2, 3)$ en un point O sous un angle infiniment peu différent de l'angle droit, et par conséquent ce plan coupera (S_2) et (S_3) suivant deux courbes $(O\pi_2)$, $(O\pi_3)$ qui se croisent en O sous un angle infiniment moins différent encore de l'angle droit; c'est-à-dire, sous un angle qui sera droit à une quantité près du second ordre, puisqu'au point O les deux surfaces (S_2) et (S_3) ne cessent pas de se couper à angle droit. (Voyez la note II.)

Substituons maintenant à (S_1) une de ses osculatrices du second degré (Σ), qui ait son sommet P au point d'osculation $(1, 2, 3)$; cette nouvelle surface coupera (S_2) et (S_3) suivant des courbes (Σ, S_2), (Σ, S_3) osculatrices en P à $(1, 2)$, $(1, 3)$: donc les surfaces gauches ou développables formées par toutes les normales de (Σ) suivant (Σ, S_2), (Σ, S_3), seront osculatrices aux courbes $(1, 2)$, $(1, 3)$. Par conséquent en O sur la normale primitive POΓ, elles seront encore tangentes aux courbes infiniment voisines $(\pi, 2)$, $(\pi, 3)$: donc, au même point O, ces deux surfaces des normales se couperont à angle droit, à des quantités près du second ordre.

Si maintenant nous traçons les droites APB, CPD, fig. 3, tangentes aux sections principales de (Σ), en son sommet P (PC, par exemple, étant la plus petite section), et que nous prenions le plan tangent en P pour plan de projection, les normales à (Σ) en deux points N, N' du même côté de AB, se projetteront en

IVme MÉMOIRE. dedans de la surface, et se dirigeront toutes deux d'un même côté de APB.

Supposons que PN, PN′ représentent les éléments du premier ordre des courbes (1, 2), (1, 3), à partir du point (1, 2, 3) ou P; NΓ, N′Γ′ étant la projection des normales parties de N et N′, le plan (π) coupera ces deux normales en deux points ν, ν' qui se projetteront à distance du second ordre de N et N′; mais PN, PN′ sont, par hypothèse, d'une longueur du premier ordre; donc, quelque position que puissent prendre les courbes d'intersection (1, 2), (1, 3) entre AB et CD, les angles $\nu P \nu'$ et NPN′ différeront toujours entr'eux de quantités du premier ordre, et par conséquent ne pourront pas appartenir aux intersections de la surface (S_1) avec (S_2) ni (S_3), tant que les deux normales NΓ, N′Γ′ ne seront pas placées sur les plans principaux de (Σ); c'est-à-dire, ne rencontreront pas la normale de (S_1) passant en P : donc, pour que les trois surfaces puissent se couper deux à deux orthogonalement, il faut qu'au point (1, 2, 3) qui leur est commun à toutes trois, les lignes (1, 2), (1, 3) suivant lesquelles elles se coupent, soient tangentes aux directions APB, CPD des sections principales de l'osculatrice (Σ) du second degré.

Or nous savons, et l'on peut démontrer, *à priori*, comme nous l'avons fait, premier Mémoire, § II, qu'au sommet P d'une surface du second degré, les directions des sections principales CPD APB sont celles de plus grande et de moindre courbure de la surface; donc aussi les directions des lignes trajectoires (1, 2), (2, 3), (3, 1) sont constamment sur les orthotomides ou surfaces trajectoires orthogonales quelconques (S_1), (S_2), (S_3), les lignes dirigées suivant la plus grande ou la moindre courbure de ces surfaces : donc, enfin, *ces trajectoires elles-mêmes sont deux à deux au même point, les lignes de plus grande et de moindre courbure des orthotomides* (S_1), (S_2), (S_3).

Examen des grandeurs graphiques singulières offertes par le système des surfaces trajectoires orthogonales.

Jusqu'ici dans les relations que nous avons reconnues pour être les conséquences nécessaires de l'orthotomie des surfaces (S_1), (S_2), (S_3), nous n'avons rien vu qui puisse isoler les surfaces d'un groupe des surfaces d'un autre groupe. Considérons leurs intersections successives, et dans les formes particulières qu'elles affectent, cherchons à suivre encore la loi qui coordonne le système général des trajectoires orthotomides.

Comme l'examen dans lequel nous allons entrer est par lui-même assez abstrait, et qu'on peut à la rigueur se dispenser d'en suivre les détails, quoiqu'ils soient propres à jeter beaucoup de jour sur la théorie de la courbure des surfaces et des lignes courbes, nous croyons devoir avertir ceux qui ne veulent pas approfondir un tel sujet, qu'ils peuvent omettre le paragraphe suivant, distingué par des guillemets, et passer de suite au troisième, où ils trouveront l'application des généralités exposées dans le premier.

§ II.

Discussion générale des systêmes de surfaces trajectoires orthogonales.

Des tropiques et des tropéïdes.

« Présentons d'abord quelques dénominations qui reviendront
» souvent dans ce que nous allons exposer. De la même manière
» que tous les cercles écliptiques sont rencontrés tangentiellement
» sur la terre ou dans le ciel, par des cercles *tropiques* qui servent de limite à l'espace couvert par ces cercles, nous appellerons *tropique* d'un systême quelconque de lignes $E\epsilon\epsilon'E'$, $E'\epsilon'\epsilon''E''$, $E''\epsilon''\epsilon'''E'''$, ... la courbe $\epsilon\epsilon'\epsilon''\epsilon'''$, fig. 4, qui touche à la fois chacune des courbes primitives.

» Par analogie, ensuite, lorsqu'au lieu d'un systême de lignes, nous aurons à considérer un systême de surfaces, nous nom-

IV

IVe MÉMOIRE. » merons surface *tropéïde*, ou simplement *tropéïde*, la surface » particulière qui dans chacun de ses points, touchera l'une des » surfaces primitives.

Des tropiques et des tropéïdes d'un système de courbes tracées sur une série de surfaces.

» D'après cela, il est visible qu'on pourra toujours considérer » le tropique $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$...., fig. 5, comme formé par les intersections » successives des courbes primitives $E\varepsilon\varepsilon'E$, $E'\varepsilon'\varepsilon''E'$, $E''\varepsilon''\varepsilon'''E''$.... » immédiatement consécutives ; que de même, on pourra toujours » considérer la surface tropéïde comme formée par les intersec- » tions successives des surfaces primitives qui se succèdent im- » médiatement.

» Supposons qu'un groupe de surfaces $(S_1)'$, $(S_1)''$, $(S_1)'''$,... soit » représenté, 1°. par le système de lignes $(1, 2)'_{\prime}$, $(1, 2)'_{\prime\prime}$, $(1, 2)'_{\prime\prime\prime}$... » couvrant $(S_1)'$; 2°. par $(1, 2)''_{\prime}$, $(1, 2)''_{\prime\prime}$, $(1, 2)''_{\prime\prime\prime}$... couvrant » $(S_1)''$; 3°. par $(1, 2)'''_{\prime}$, $(1, 2)'''_{\prime\prime}$, $(1, 2)'''_{\prime\prime\prime}$.... couvrant $(S_1)'''_{\prime}$, etc. » Si nous considérons les intersections successives des $(S_1)'$, $(S_1)''$, » $(S_1)'''$..., ou la *tropéïde* de leur système, nous dirons : dans » toute l'étendue de l'intersection de $(S_1)'$ et de $(S_1)''$, chaque courbe » $(1, 2)'$ est coupée par une courbe $(1, 2)''$; de même dans toute » l'étendue des intersections de $(S_1)''$ et de $(S_1)'''$, chaque courbe » $(1, 2)''$ est coupée par une courbe $(1, 2)'''$; et ainsi de suite. Ainsi, » par exemple, $(1, 2)'_{\prime}$, $(1, 2)''_{\prime}$, $(1, 2)'''_{\prime}$,.... se couperont consé- » cutivement, et formeront une première surface $(S_2)_{\prime}$ et un tro- » pique $[1, 2]_{\prime}$ sur cette surface ; de même $(1, 2)'_{\prime\prime}$, $(1, 2)''_{\prime\prime}$, $(1, 2)'''_{\prime\prime}$ » se couperont consécutivement, en formant une seconde sur- » face $(S_2)_{\prime\prime}$, et un tropique $[1, 2]_{\prime\prime}$ sur cette surface, etc. » Nous venons donc d'obtenir un second système de surfaces (S_2) » absolument différent du premier système (S_1) : et les tropiques » $[1, 2]_{\prime}$, $[1, 2)_{\prime\prime}$, $[1, 2]_{\prime\prime\prime}$ de ces surfaces (S_2) sont tous sur la » tropéïde des (S_1). La réciproque de ce principe est également » vraie ; c'est-à-dire qu'en repassant des (S_2) aux (S_1), comme

» nous sommes parvenus des (S_1) aux (S_2) ; nous verrons que les tropiques $[2, 1]_{,}$, $[2, 1]_{,,}$, $[2, 1]_{,,,}$ des (S_1) sont tous sur la tropéïde des (S_2). IVme MÉMOIRE.

» Ainsi, lorsque l'on considère une série de surfaces dont le nombre dépend d'un seul paramètre arbitraire, et, sur chaque surface, un système déterminé de lignes courbes. Ces lignes courbes, par leurs intersections successives sur les surfaces qui les contiennent respectivement, forment une première série de tropiques, et l'ensemble de ces tropiques, une certaine surface tropéïde. Ensuite, lorsque l'on considère chaque courbe comme coupée par une autre, prise dans la surface infiniment voisine, on trouve une nouvelle série de tropiques, une nouvelle tropéïde : or cette dernière tropéïde est ce qu'on appelle ordinairement la surface enveloppe des surfaces primitives; et l'autre tropéïde, au contraire, est l'enveloppe de la nouvelle série de surfaces; je veux dire de la série des surfaces formées par les intersections successives de chacune des courbes données avec celle qui la suit et la précède immédiatement en passant d'une des surfaces primitives à l'autre.

» Revenons maintenant à notre système général de surfaces trajectoires orthotomides (S_1), (S_2), (S_3). Le groupe des (S_1) est traversé par celui des (S_2) suivant les courbes $(1, 2)$: à ce système de courbes $(1, 2)$, correspondra donc d'abord une première suite de tropiques $[1, 2]$, placés sur les (S_2), et formant par leur ensemble la tropéïde $[\sigma_1]$ des (S_1); puis une seconde suite de tropiques $[2, 1]$, placés sur les (S_1), et formant par leur ensemble la tropéïde $[\sigma_2]$ des (S_2). Enfin, la même correspondance des lignes tropiques et des surfaces tropéïdes avec les surfaces primitives, aura lieu pour les courbes $(1, 3)$, intersections des (S_1), avec les (S_3), et pour celles $(2, 3)$, intersections des (S_2), avec les (S_3).

IVe MÉMOIRE.

» Cela posé, considérons, par exemple, les intersections successives des surfaces (S_3), ou leur tropéïde $[\sigma_3]$. Généralement parlant, cette tropéïde sera la limite de l'espace occupé par les (S_3) : elle sera donc également la limite de l'espace occupé par les (S_1) et les (S_2), puisque partout les surfaces du système général devant se couper à angle droit, chaque point des surfaces d'une série est aussi commun à quelque surface des deux autres séries. Mais cette tropéïde $[\sigma_3]$ étant la limite de l'espace occupé par les surfaces (S_3), leur est évidemment partout tangente. Donc elle sera partout normale à quelqu'une des (S_1) et des (S_2). Concluons d'abord que les courbes communes aux surfaces (S_1), aux (S_2) et à la tropéïde $[\sigma_3]$, prises deux à deux dans l'un et dans l'autre de ces trois séries, forment dans toute l'étendue de cette $[\sigma_3]$, un triple système de trajectoires orthotomiques.

Arête de rebroussement des surfaces trajectoires orthogonales.

» Nous venons de voir qu'aucune des surfaces (S_1), (S_2) ne peut franchir la limite ou tropéïde $[\sigma_3]$, que chacune d'elles pourtant rencontre à angle droit : donc après avoir atteint cette tropéïde, il faut aussi que chacune d'elles se rebrousse pour former une seconde nappe unie à la première dans toute l'étendue du contact des (S_1), ou (S_2) avec $[\sigma_3]$; par conséquent, chacune des lignes (1, 2) intersection des (S_1) et des (S_2), en venant rencontrer à angle droit la tropéïde $[\sigma_3]$, change de nappe sur (S_1) et sur (S_2), et rebrousse perpendiculairement à la même $[\sigma_3]$.

» Par conséquent, encore, toutes les orthotomiques (1, 3), placées sur la même (S_1), en venant par leurs intersections successives former leur tropique [1, 3] sur $[\sigma_3)$, toucheront ce tropique sur $[\sigma_3]$, et changeront de nappe en se prolongeant toujours sur la même (S_1). Enfin, ce tropique sera pour les deux nappes de (S_1) une véritable arête de rebroussement.

» De même, toutes les trajectoires (2, 3) placées sur une même surface (S_2), viendront toucher leur tropique [2, 3] sur la tropéïde

» $[\sigma_3]$, et ce second tropique sera pour les (S_2) ce qu'était le premier pour les (S_1), la limite de deux nappes distinctes, en un mot, une véritable arête de rebroussement des (S_2). IVme MÉMOIRE.

» Ainsi sur la tropéïde $[\sigma_3]$, les projections (1, 3) forment une » première série d'arêtes de rebroussement qui sont respective- » ment les tropiques des (S_1), premier groupe; les trajectoires » (2, 3) forment une seconde série d'arêtes de rebroussement qui » sont respectivement les tropiques des (S_2), second groupe, et » chaque tropique de la première série coupe à angle droit tous » ceux de la seconde série; mais nous venons de voir que les » trajectoires (1, 2) ont toutes un point tropique ou point de re- » broussement sur $[\sigma_3]$ qu'elles atteignent à angle droit:

» Donc enfin, *les tropiques de* (S_1), *les tropiques de* (S_2), *et les* » *intersections* (1, 2) *des surfaces* (S_1) *avec les* (S_2), *forment sur* » *la tropéïde* $[\sigma_3]$, *le système général de courbes orthotomiques* » *dont nous avons démontré l'existence il n'y a qu'un moment.*

» D'ailleurs tous les résultats que présentent les relations des (S_3) » avec les (S_1) et les (S_2), sont également applicables aux (S_1) et » aux (S_2) considérées respectivement par rapport à la combinaison » des deux autres groupes de surfaces (S_2), (S_3); (S_3), (S_1). Ainsi le » système complet des orthotomides (S_1), (S_2), (S_3) présente en » général trois tropéïdes bien distinctes $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$, dont chacune » est touchée par toutes les surfaces orthotomides et leur sert de » limite. Mais chaque tropéïde est touchée tangentiellement par les » orthotomides d'un premier groupe, et normalement par celles » des deux autres groupes, dans toute l'étendue des lignes tro- » piques réciproquement orthogonales : enfin ces tropiques sont » pour les deux derniers groupes de vraies arêtes de rebroussement » placées tout entières sur la tropéïde que l'on considère.

» En général, chaque orthotomide (S_1) a donc deux tropiques » bien distincts, l'un produit par les intersections successives des » (1, 2) sur la tropéïde $[\sigma_2]$; l'autre par les intersections successives

IVme MÉMOIRE. » des (1, 3) sur la tropéïde $[\sigma_3]$: ces tropiques se coupent à angle » droit, et sont l'un et l'autre de vraies arêtes de rebroussement » de la surface (S_1) qui les contient.

Des lignes hypertropiques.

» Considérons maintenant, sur la tropéïde $[\sigma_2]$, les tropiques [1, 2] » des (S_1) ; cherchons la courbe formée par leurs intersections » successives, c'est-à-dire, le tropique des tropiques [1, 2], ou » l'*hypertropique* [I, II] des surfaces (S_1). Deux tropiques con- » sécutifs $[1, 2]'$, $[1, 2]''$ appartiennent à deux surfaces $(S_1)'$, $(S_1)''$ » aussi consécutives ; cela est évident : donc l'intersection des deux » tropiques est sur la surface $[\sigma_1]$, tropéïde des (S_1). Donc tous » les points de l'*hypertropique* [I, II] sont sur $[\sigma_1]$; mais par » hypothèse, ils sont placés sur $[\sigma_2]$: donc l'hypertropique des (S_1) » est la commune intersection [I, II] des deux tropéïdes $[\sigma_1]$ et » $[\sigma_2]$; mais par les mêmes raisons, l'intersection de $[\sigma_2]$ et $[\sigma_1]$ » est aussi l'hypertropique des (S_2) : donc, enfin, l'intersection des » tropéïdes (σ_1) et (σ_2) est à la fois la courbe hypertropique des » (S_1) et des (S_2). Ces hypertropiques étant des lignes extrême- » ment remarquables, il convient de s'arrêter un moment à leur » examen.

» Il est évident que les tropéïdes $[\sigma_1]$ et $[\sigma_2]$ étant respective- » ment tangentes aux surfaces orthotomides (S_1) et (S_2), si les tro- » péïdes se pénètrent réciproquement, elles ne pourront le faire » qu'à angle droit. Donc ces (S_3), partout normales à $[\sigma_1]$ et à $[\sigma_2]$, » traceront sur ces tropéïdes les courbes tropiques [3, 1], [3, 2], » normales entr'elles et à l'hypertropique [I, II].

» Comme la surface (S_3) ne saurait dépasser les tropéïdes $[\sigma_1]$, » $[\sigma_2]$, il faut que le point d'intersection de deux tropiques [3, 1], » [3, 2], soit pour l'un et pour l'autre un vrai point de rebrous- » sement. Ce point placé sur la ligne *hypertropique*, sera donc la » limite commune des deux tropiques [3, 1], [3, 2] de l'orthoto- » mide (S_3). Il sera pour nous le *point hypertropique* de la surface

» (S₃); par conséquent, la courbe d'intersection des tropéïdes [σ_1], » [σ_2], ou la ligne hypertropique [I, II], n'est autre chose que la » série des points hypertropiques des surfaces primitives (S_3). IVme MÉMOIRE.

» Voici quelle est la forme générale de la surface (S_3) à son point » hypertropique H, fig. 7.

Des points hypertropiques. Forme remarquable des surfaces en ces points.

» Ce point étant un point de rebroussement pour les deux tro- » piques [1, 3], [2, 3], est le point de concours de quatre branches » Hα, Hα'; Hβ, Hβ' de ces deux tropiques; mais chaque point » α, α'.... β, β'.... est un point de rebroussement des trajec- » toires (2, 3) ou (1, 3) : on a donc quatre feuillets γ, δ, γ', δ' » qui viennent se confondre en H avec le plan normal au même » point à l'hypertropique [I, II]. Il semble qu'ici les points hy- » pertropiques ne pouvant développer les surfaces (S_3) complè- » tement autour d'eux, les plient chacune en quatre nappes dont » la superficie remplit en ce point un quart du plan tangent. Cette » forme est vraiment remarquable; elle fait, comme on voit, du » point H, la limite des tropiques αHα', βHβ' de l'orthotomide (S_3), » ou le point tropique de ces courbes tropiques. C'est ce que » j'appelle le *point hypertropique* de la surface (S_3). Ainsi donc, » chaque surface (S_3) doit généralement en avoir autant qu'il y a de » points communs à cette même (S_3) et aux deux tropiques [σ_1], [σ_2].

» Nous allons maintenant examiner les cas singuliers où les points » hypertropiques présentent des formes entièrement différentes.

Des points remarquables où la forme des surfaces est semblable à celle offerte par le cône, à partir du sommet.

» Supposons d'abord que l'une des tropéïdes, [σ_3], par exemple, se » réduise à une ligne courbe {σ_3}. Cette ligne ne cessera pas pour » cela d'être le lieu des tropiques [1, 3], [2, 3] de toutes les surfaces » (S_1), (S_2). Mais comme cette ligne tropéïde doit être alors le lieu des » intersections successives de toutes les (S_3), il faudra que chaque » (S_3) contienne cette ligne tout entière. Dans ce cas, chaque point O » de {σ_3}, fig. 8, représentera tout un tropique [1, 3], [2, 3] des ortho-

IVme MÉMOIRE. » tomides (S_1) et (S_2), c'est-à-dire, qu'au point O passeront toutes » les courbes (1, 3) appartenant à la même (S_1), et toutes les » courbes (2, 3) appartenant à la même (S_2). Ce point tropique O » sera donc pour les surfaces (S_1) et (S_2), ce qu'est le sommet » du cône par rapport à cette surface; les courbes (2, 3) ou (1, 3) » étant respectivement représentées par leurs tangentes arêtes d'un » cône dont le centre est en O. Il est facile, en effet, de se con- » vaincre qu'on peut toujours concevoir deux cônes dont le centre » soit en O sur la courbe tropéïde, et dont les arêtes soient res- » pectivement tangentes aux courbes (1, 3) de (S_1), et (2, 3) de » (S_2). Il faudra donc qu'à partir de ce point O qui lui seul est une » des trajectoires, on trouve pour lignes d'une des courbures des » (S_1) et des (S_2) des courbes fermées, et d'autant plus petites, » qu'elles seront plus voisines de lui.

Des ombilics. Première espèce.

» Si l'une des surfaces (S_1), ou (S_2), fig. 9, (S_2), par exemple, avait » un point de rebroussement O sur $\{\sigma_3\}$, ce point appartiendrait » nécessairement à la tropéïde $[\sigma_2]$: donc il serait un point *hyper-* » *tropique* sur la surface (S_1). Cependant le cône tangent à (S_1) » au même point, se réduirait à un simple plan, et le point O ne » serait plus en apparence un point singulier de (S_1). Mais il serait » toujours le représentatif d'une ligne trajectoire (1, 2), d'où les » courbes trajectoires (1, 3) divergeraient comme autant de rayons » partis d'un seul et même centre; toutes les courbes trajectoires (1,2), » au contraire, formeraient, à partir de ce point, des courbes fer- » mées autour de lui, d'abord infiniment petites, puis successive- » ment de plus en plus grandes, et enfin d'une forme quelconque, » fermées ou non fermées selon la nature de la surface (S_1). Ces » points hypertropiques singuliers, sans en avoir l'apparence, ont » été particulièrement nommés *ombilics;* cette dénomination est » réellement très-heureuse; et, comme la plupart des dénomina- » tions empruntées aux anciens, elle porte son caractère avec elle :

» ainsi, par exemple, les latins eussent appelé du nom d'*ombilic*, IVme MÉMOIRE.
» le centre de la surface du parasol, et c'est effectivement un véri-
» table ombilic de l'espèce que nous considérons. Si l'on réfléchit
» maintenant sur ce que sont les trajectoires du système d'orthoto-
» mides dont nous nous occupons, on appercevra facilement l'iden-
» tité de ces points avec les ombilics de première espèce donnés par
» les lignes de courbure des surfaces. (Voyez Mémoire III, art. IV).

» Lorsque la surface du tropéïde $[\sigma_3]$ se réduit simplement à une
» ligne courbe $\{\sigma_3\}$, comme dans le cas que nous venons d'exa-
» miner; par cela même qu'elle devient la commune intersection
» de toutes les surfaces (S_3), chacun de ses points est commun à
» toutes les courbes (1, 3) d'une même (S_1) : chaque surface (S_1)
» est par conséquent perpendiculaire à la courbe $\{\sigma_3\}$. Donc cette
» courbe elle-même n'est autre chose qu'une des trajectoires ortho-
» gonales des (S_1), c'est-à-dire, une ligne (2, 3). Donc la courbe $\{\sigma_3\}$
» est toute entière sur une certaine surface (S_2); mais chaque point
» de cette courbe représente une ligne (2, 1): donc la courbe (σ_3)
» elle-même représente toute une surface (S_2). Les autres (S_2) sont
» donc des espèces de canaux dont cette ligne est comme un axe;
» ces canaux s'enveloppent successivement à mesure qu'ils ont un
» plus grand diamètre, et généralement ne se pénètrent pas.

» Si, par exemple, nous supposons qu'une sphère d'un rayon va-
» riable, mais toujours infiniment petit, décrive par son centre la
» courbe $\{\sigma_3\}$ l'enveloppe de l'espace qu'elle va parcourir, sera
» l'une des surfaces (S_2), les lignes longitudinales de courbure seront
» les lignes (2, 3) et les petits cercles caractéristiques seront les
» lignes (1, 2).

» Nous allons bientôt trouver un autre genre de lignes $\{\sigma_3\}$ dont
» tous les points seront aussi les ombilics de (S_1); mais des ombilics
» qui jouent sur les surfaces un rôle bien différent.

» Si, toujours dans la même supposition, on conçoit en outre Sont aussi des points hyperboliques.

IVme MÉMOIRE. » que la surface (S_2) qui enveloppe immédiatement $\{\sigma_3\}$, la ren-
» contre en un seul point, ce point se trouvant sur deux (S_1), sera
» sur leur tropéïde $[\sigma_2]$, mais il est déjà sur la tropéïde $[\sigma_3]$: donc
» il est un point hypertropique. Et comme cette hypothèse ne
» change rien à la forme des lignes de courbure des (S_1) autour
» de leurs ombilics, ces ombilics sont aussi une espèce de points
» hypertropiques ; mais ils sont bien différents de ceux dont nous
» avons, en premier lieu, fait connaître la forme, et qui présentent
» quatre feuillets rectangulaires superposés.

Seconde espèce. » Il existe encore par rapport aux lignes orthotomiques (1, 2),
» (2, 3), (3, 1), fig. 10, un genre d'ombilics qu'il est très-important
» de considérer sur les surfaces orthotomides (S_1), (S_2), (S_3). C'est
» celui qui se présente sur les surfaces (S_1), lorsque deux branches
» des trajectoires (1, 3), par exemple, venant à se resserrer de
» plus en plus, se confondent enfin en une courbe unique {I, III}.
» Cette courbe est brusquement terminée en un certain point O
» dont les autres courbes (1, 3) approcheront aussi près qu'on
» voudra, mais sans pouvoir dépasser ce point limite. Si
» maintenant nous considérons les orthotomiques (1, 2), nous
» verrons qu'à partir des différents points de O{I, III}, elles doivent
» s'étendre en sens contraire des orthotomiques (1, 3), afin de
» les couper constamment à angle droit. De plus, il ne faut pas
» qu'infiniment près du point O, ces courbes (1, 2) coupent le
» prolongement de {I, III} ; car les orthotomiques (1, 2) présen-
» teraient un système de courbes fermées autour du point O qui
» deviendrait un ombilic de première espèce, et par lequel toutes
» les courbes (1, 3) devraient passer, ce qui est contraire à
» l'hypothèse actuelle. Donc il faudra que les courbes (1, 2)
» s'étendent le long du prolongement de {I, III}, comme les
» courbes (1, 3) s'étendent le long de {I, III} même : donc aussi
» ce prolongement sera la ligne {I, II} dans laquelle deux branches

» $\alpha'\omega'$, $\omega'\zeta'$ de (1, 2) se réunissent en une seule branche, pro- IVme MÉMOIRE.
» priété vraiment remarquable. Relativement à la surface (S_1) qui
» contient toutes les trajectoires (1, 3) et celles (1, 2) qui se
» croisent simultanément, le point singulier O est ce qu'on entend
» par ombilic de seconde espèce.

» Si nous répétons le même raisonnement pour chaque nouvelle
» surface (S_1), nous trouverons de la sorte une infinité de parties
» $\overline{\{I, III\}\,O}$ et de parties $\overline{O\{I, II\}}$ qui seront le simple prolon-
» gement des premières; de manière que l'ensemble des courbes
» $\overline{\{I, III\}\,O\{I, II\}}$ formera dans l'espace une certaine surface;
» la suite des points O tracera sur cette surface une certaine ligne,
» et cette ligne la divisera en deux parties qui joueront un rôle bien
» différent dans le système général des orthotomides; car l'une de
» ces parties représentera deux nappes d'une des (S_2), réunies en une
» seule nappe; et l'autre représentera deux nappes d'une des sur-
» faces (S_3), pareillement confondues en une seule. Cette courbe
» sera donc, si je puis parler ainsi, la suite des points de par-
» tage des surfaces (S_2) du second groupe, et de celles (S_3) du
» troisième : enfin, cette courbe tracera sur les surfaces (S_1), des
» points singuliers qui seront autant d'*ombilics de seconde espèce*,
» relativement à ces surfaces (S_1). Nous verrons ces diverses con-
» sidérations devenir plus sensibles en s'appliquant à la courbure
» des surfaces du second degré, qui nous offriront des ombilics et
» des lignes ombilicales de ce genre.

» Il est facile d'apercevoir la raison métaphysique de ces der-
» nières propriétés. Sans doute il est des cas où les surfaces (S_1)
» sont distinctes des surfaces (S_2), comme les (S_2) des (S_3), ce qui
» forme trois séries de surfaces soumises chacune à des lois diffé-
» rentes : ainsi, par exemple, une série de sphères concentriques,
» une série de plans méridiens, une série de cônes ayant pour
» bases des parallèles, formeront un système de surfaces trajec-

IVme MÉMOIRE. » toires orthogonales, et pourtant les sphères, les plans, les cônes » seront donnés par des lois bien différentes. Mais en général, il » faut considérer les trois séries de surfaces comme trois ramifi- » cations d'un système unique, et c'est pour passer d'une manière » continue d'une de ces séries à l'autre série, qu'on trouve les » ombilics et les lignes ombilicales que nous venons de faire con- » naître. Ceci deviendra beaucoup plus clair par l'application aux » surfaces du second degré.

» Observons en passant que la surface singulière commune à » la fois aux groupes (S_2) et (S_3) présente un système de trajec- » toires (2, 3) sur les (S_2), et (3, 2) sur les (S_3) qui deviennent » un seul et même système continu. De plus, la courbe lieu des » ombilics est évidemment une de ces trajectoires (2, 3), puis- » qu'elle est commune à deux surfaces de différents groupes » (S_3), (S_2). Donc, il faut que le tropique [2, 3] des (S_2) placé sur » $[\sigma_3]$, et le tropique [3, 2] placé sur $[\sigma_2]$ forment les deux parties » d'une seule et même courbe. Cette courbe est à la fois pour les » deux tropéïdes, un véritable *tropique* ou arête de rebrousse- » ment; et les points marqués sur elle, par les surfaces (S_1) étant » à la fois communs à $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3]$, sont, pour la surface (S_1) passant » par chaque point, un point hypertropique. Cet hypertropique est » donc encore d'une espèce différente des deux genres que nous » avons déjà reconnus; mais son exemen rendrait trop longue une » discussion de points singuliers qu'on trouvera peut-être déjà trop » étendue. Contentons-nous d'observer encore ici que les surfaces » du second degré nous offriront des exemples de ces points ombi- » lics et de ces lignes ombilicales.

Théorème. » Lorsqu'atteignant la tropéïde $[\sigma_3]$, les lignes trajectoires (1, 3), » par exemple, fig. 11, perdent leur courbure, alors le tropique » (1, 3) de chaque surface (S_1) jouit d'une propriété remarquable » relativement à la tropéïde $[\sigma_3]$ qui le contient. Soient en effet

» les deux trajectoires infiniment voisines (1, 3), (1, 3)′, et qui se » coupent en p sur leur tropique [1, 3]. Les éléments φp, $p\varphi'$ » de ces deux courbes seront rectilignes, et le plan $\varphi p\varphi'$ sera » osculateur à ces deux courbes, ainsi qu'à leur tropique [1, 3] » qui contient φp et $p\varphi'$; or ces deux éléments étant placés par » hypothèse sur la même (S_1), le plan $\varphi p\varphi'$ est tangent en p à (S_1), et » par conséquent en ce même point normal à la tropéide $[\sigma_3]$ (*). D'où » résulte ce théorème : *Si les trajectoires* (1,3), *d'ailleurs entièrement » arbitraires, perdent leur courbure en atteignant leur tropique » [1, 3]; les plans osculateurs de ce tropique seront normaux » à la tropéide* $[\sigma_3]$ *qui les contient*, et par conséquent, *chacun » de ces tropiques sera la ligne la plus courte qu'on puisse » mener entre deux quelconques de ses points sur la surface » tropéide qui le contient.*

IVme MÉMOIRE.

» Jusqu'ici nous avons laissé nos surfaces trajectoires dans la plus » grande généralité que puisse comporter leur orthotomie, et les » résultats auxquels nous sommes parvenus, sont par conséquent » susceptibles de s'appliquer à tous les genres de surfaces. Des- » cendons maintenant peu à peu de ce degré de généralité. Il est » utile d'observer comment la géométrie, après s'être élevée tout » d'un coup aux principes les plus généraux, peut devenir élé- » mentaire, ensuite par la facilité des conséquences et la simplifi- » cation des résultats qu'elles présentent.

Du système d'orthotomides, lorsque deux groupes de surfaces y deviennent développables.

» Au lieu de regarder comme arbitraires toutes les surfaces » (S_1), (S_2), (S_3), supposons qu'une seule (S_1) conserve sa géné- » ralité, tandis que les (S_2) et les (S_3) sont assujéties à devenir dé-

(*) En effet, la tropéide $[\sigma_3]$ étant partout tangente à quelqu'une des (S_3), et les (S_3) partout normales aux surfaces (S_1), il faut aussi que la tropéide $[\sigma_3]$ soit partout normale aux surfaces (S_1).

IVme MÉMOIRE. » veloppables. Voyons d'abord si cette hypothèse est généralement » possible. Nous savons que les normales de (S_1) se coupent consécutivement lorsqu'elles partent des points d'une même ligne » trajectoire (1, 2) ou (1, 3). L'ensemble des normales de (S_1) fournies par une seule trajectoire, forme donc constamment une » surface développable. A la série des trajectoires (1, 2) de (S_1), » correspondra celle des surfaces développables (Δ_2); de même, à » la série des trajectoires (1, 3), correspondra celle des dévelop» pables (Δ_3).

» Il est évident que les normales de (S_1) étant communes à ces » deux systèmes développables (Δ_2), (Δ_3), elles en seront respec» tivement les communes intersections, et l'angle formé par les » développables de différent système étant égal à celui formé par » les (S_2) et les (S_3) auxquelles elles sont tangentes, il faudra que » les développables (Δ_2) coupent les (Δ_3) à angle droit dans toute » l'étendue des normales à (S_1).

» Par conséquent, étant donnée une surface quelconque (S_1), il » est toujours possible de concevoir un système général de tra» jectoires orthogonales, composé de la manière suivante.

» *Premier groupe*. La surface (S_1) et toutes celles $(S_1)'$, $(S_1)''$, » $(S_1)'''$, ... qu'on formera par un accroissement ou par un décrois» sement uniforme de toutes les normales à (S_1).

» *Second et troisième groupes*. Les surfaces développables des » normales à (S_1) : et toutes les surfaces d'un des groupes coupe» ront à angle droit chacune des surfaces des deux autres groupes.

Conduit à la théorie générale des lignes de courbure des surfaces.

» Nous savons d'ailleurs que les trajectoires (1, 2) et (1, 3) sont » les lignes de plus grande et de moindre courbure de (S_1); par » conséquent, un premier groupe de développables, les (Δ_2), par » exemple, tracent sur les primitives (S_1) toutes les lignes (1, 2) » de plus grande courbure, et le second groupe de développables, » les (Δ_3), toutes les lignes (1, 3) de moindre courbure.

» Passons maintenant à l'examen des surfaces tropéïdes de ce IVme MÉMOIRE.
» nouveau systême. Si nous supposons qu'une arête (2, 3) de (Δ_2),
» c'est-à-dire une normale de (S_1), prenne successivement toutes
» les positions possibles sur la même développable (Δ_2), les inter-
» sections successives de cette droite engendreront le tropique
» [2, 3] de cette développable : c'est ce qu'on appelle son *arête*
» *de rebroussement*. Mais en changeant infiniment peu de position,
» la droite tourne autour du point qu'elle a sur le tropique [2, 3],
» tandis que le point de cette normale, placé sur (S_1), décrit dans
» l'espace un petit arc de cercle tout entier sur la primitive (S_1),
» tout entier sur la développable (Δ_2) que l'on considère, et par
» conséquent tout entier sur la trajectoire (1, 2).

» Ainsi chacun des points du tropique [2, 3] est un centre de
» courbure pour la trajectoire (1, 2); le tropique entier est la dé-
» veloppée de la trajectoire. De même, les surfaces développables
» (Δ_3) tracent sur (S_1) des courbes (1, 3) dont les centres de cour-
» bure sont les points correspondants des tropiques [3, 2], et
» dont ces tropiques mêmes sont par conséquent les développées.
» Observons maintenant que tous les points de la normale de (S_1),
» placés entre (S_1) et le tropique le plus voisin, sont plus près du
» point d'application de la normale, que de tout autre point de (S_1),
» et qu'au contraire les points de la normale au-delà du second
» tropique, sont plus loin du point d'application que de tout autre
» point de (S_1) : donc en deçà et au-delà des deux tropiques, aucun
» point de la normale ne peut être le centre d'un cercle oscula-
» teur de (S_1) au point d'application; donc les points de la normale,
» placés sur les deux tropiques, sont les centres du plus petit et du
» plus grand cercle osculateur de (S_1). Ces points ont été nommés
» *centres de courbure* de la surface (S_1), parce qu'ils fixent les limites
» de cette courbure que, d'ailleurs, ils déterminent complettement.

» La direction du plus petit cercle étant sur (S_1) celle de la
» plus grande courbure des sections normales, si, sur (S_1), l'on

IVme MÉMOIRE. » suit toujours la direction de plus grande courbure, on décrira » ce qu'on appelle une *ligne de plus grande courbure;* si au » contraire, on marche toujours suivant la direction de moindre » courbure, on décrira une *ligne de moindre courbure;* mais alors » on aura parcouru les traces des développables (Δ_2), (Δ_3) sur (S_1), » et ces traces se coupent partout à angle droit : donc les lignes » de différente courbure se coupent constamment à angle droit. » C'est un des principes fondamentaux de la théorie des lignes de » courbure.

» Il est évident, d'ailleurs, que la courbure des arêtes rectilignes » (2, 3), (2, 3)′, (2, 3)″...intersections successives des développables » (Δ_2), (Δ_3), est nulle au point où ces arêtes atteignent les tropéïdes » $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3]$. Or, dans ce cas, nous avons vu que chacun des » tropiques est la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux » quelconques de ses points sur la tropéïde qui le contient : donc » chacun des tropiques des surfaces développables (Δ_2) et (Δ_3) est, » entre deux quelconques de ses points, la ligne la plus courte » qu'il soit possible de mener sur la tropéïde $[\sigma_3]$ ou $[\sigma_2]$ qui le » contient; c'est-à-dire que les *lignes des centres* de l'une et de » l'autre courbure de (S_1), *sont les lignes les plus courtes* qu'il soit » possible de mener entre deux quelconques de leurs points sur les » *surfaces des centres de courbure.*

» De plus, chaque normale (2, 3) de (S_1) est tangente aux deux » tropéïdes (σ_2) et (σ_3); la développable (Δ_2) qui passe par cette » normale, est tangente à la tropéïde $[\sigma_2]$, et normale à la tro- » péïde $[\sigma_3]$; au contraire la développable (Δ_3) qui passe par la » même normale, est normale à la tropéïde $[\sigma_2]$, et tangente à » la tropéïde $[\sigma_3]$: d'où il suit que les deux tropéïdes $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3]$, » vues d'un même point, offriront des contours apparents, réci- » proquement orthotomiques, c'est-à-dire, dont les projections » se couperont constamment à angle droit : substituez à l'expres-

» sion *tropéïde* ou *centro-curvide*, la longue suite de mots : *la* IVme MÉMOIRE.
» *surface des centres d'une courbure de la surface primitive*,
» et ce théorème se présentera sous la forme qu'on lui donne
» ordinairement dans la théorie de la courbure des surfaces.

» Observons maintenant que les surfaces primitives (S_1) étant
» formées par une augmentation ou par une diminution uniforme
» de toutes les normales, elles ne peuvent se rencontrer nulle part,
» et par conséquent former leur tropéïde $[\sigma_1]$ qui, dans ce cas,
» n'existe point. Le système particulier d'orthotomides qui nous
» occupe, ne peut donc avoir que deux surfaces tropéïdes $[\sigma_2]$ et
» $[\sigma_3]$, lieux des centres de courbure des (S_1), et par conséquent
» aussi, qu'une courbe *hypertropique* [II, III], intersection de $[\sigma_2]$
» et de $[\sigma_3]$.

Grandeurs graphiques singulières offertes par la courbure des surfaces.

» Si nous considérons la surface (S_1) lorsqu'elle atteint une des
» tropéïdes, $[\sigma_3]$, par exemple, elle y trace une véritable *arête de*
» *rebroussement;* c'est le tropique des lignes de courbure (1, 2).
» De même, en atteignant la tropéïde $[\sigma_3]$, elle y trace une seconde
» arête de rebroussement; c'est le tropique des lignes de courbure
» (1, 3). Enfin, (S_1) rencontre à la fois les deux tropéïdes $[\sigma_2]$,
» $[\sigma_3]$ en un point hypertropique semblable à ceux que nous avons
» décrits précédemment, fig. 7. Mais, comme on voit, les surfaces
» primitives (S_1) n'ont un point *hypertropique* qu'autant que les
» tropéïdes $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3]$ ont à la fois un point de commun avec (S_1).
» Monge, dans son Mémoire imprimé, Journal de l'École Polytech-
» nique, vol. V, cahier XI, sur les surfaces dont les normales sont
» tangentes à la sphère et au cône, indique un des points hypertro-
» piques de ce genre; c'est le point qui se trouve à la fois sur la
» surface primitive, sur le cône et sur la sphère, lieux des centres
» de courbure. Ainsi, la surface considérée par ce géomètre, ne pré-
» sente pas un point singulier dont la forme lui est particulière; une



» infinité d'autres surfaces peuvent jouir de la même propriété, et
» nous venons de voir quelles conditions sont nécessaires pour cela.

» Nous avons vu encore que les ombilics d'une surface (S_1),
» quelle que soit leur espèce, sont des points tels que la trajec-
» toire qui les contient tous, va rencontrer en un même point les
» deux tropéïdes $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3]$: donc lorsque la surface (S_1) aura
» quelqu'ombilic, il faudra que sa normale (2, 3) passant par
» l'ombilic, rencontre au même point, les deux surfaces des
» centres $[\sigma_2]$ et $[\sigma_3)$, c'est-à-dire, que les ombilics de première et
» de seconde espèce sont toujours des points de la surface (S_1),
» pour lesquels les centres de plus grande et de moindre courbure
» se confondent, et pour lesquels, par conséquent, toutes les sec-
» tions normales étant d'égale courbure, la surface (S_1) devient
» susceptible d'être osculée en tout sens par une sphère.

Seconde simplification du système général d'orthotomides. Théorie de la courbure des lignes courbes.

» En simplifiant notre système général de trajectoires (S_1), (S_2),
» (S_3), nous sommes parvenus à déterminer tout ce qui peut être
» relatif à la forme des surfaces, considérées dans l'ensemble de
» leurs lignes de courbure. Un degré de simplification encore, et
» nous parviendrons à déterminer tout ce qui peut caractériser sur
» la surface générale (S_1), la forme d'une ligne de courbure indivi-
» duelle. Nous pouvons considérer cette ligne (λ) comme une sur-
» face dont un rayon de courbure est partout nul, et nous occu-
» per seulement de son autre courbure. Concevons simultanément
» tracées toutes les normales de cette courbe (λ); elles seront les
» trajectoires de deux groupes de surfaces orthotomides dévelop-
» pables (Δ_2), (Δ_3). J'observe d'abord que toutes les normales
» parties d'un même point de (λ), sont dans le plan normal en ce
» point à cette courbe : donc un premier groupe de développables
» (Δ_2) sera formé par la série des plans normaux à (λ); or les
» développables (Δ_3) ont chacune leur tropique placé sur la tropéïde
» $[\sigma_2]$ des autres développables (Δ_2) : d'où résulte ce théorême.

» Si d'un premier point de la courbe (λ) on passe au point con-
» sécutif, puis au troisième, au quatrième, etc..., et qu'on veuille
» qu'une première normale partie du premier point, soit coupée
» par une seconde partie du second point, celle-ci par une troi-
» sième partie du troisième point, et ainsi de suite, on formera
» autant de surfaces développables (Δ_3) que la courbe (λ) peut
» avoir de normales en un seul point, c'est-à-dire, une infinité.
» Les arêtes de rebroussement ou les tropiques de ces dévelop-
» pables (Δ_3), formeront une surface unique, et ce sera précisé-
» ment la développable [σ_3], formée par les intersections successives
» des plans normaux (Δ_4) de la courbe : chacun des tropiques des
» développables (Δ_3) sera une ligne des centres de courbure de
» la courbe primitive, et par conséquent, la tropéïde développable
» [σ_3] sera le lieu de tous les centres de courbure de la ligne
» courbe (λ).

» Mais chaque tropique des (Δ_3), est, sur la tropéïde [σ_3], la plus
» courte ligne qu'on puisse mener entre deux de leurs points ;
» d'où résulte cet autre théorême : Les lignes des centres de cour-
» bure d'une courbe (λ) sont les lignes les plus courtes qu'il soit
» possible de mener sur la surface des centres de courbûre de
» cette même courbe ; de manière qu'en développant la tropéïde
» [σ_3] formée par les intersections successives des plans normaux
» (S_3), toutes les lignes des centres de courbure se réduisent à la
» fois à de simples lignes droites.

» Et par conséquent, toutes les développées d'une ligne courbe
» quelconque, sont à la fois placées sur une surface développable
» unique, où elles sont autant de lignes de plus courte distance
» entre deux quelconques de leurs points.

» Si donc on applique un fil sur chacun de ces tropiques [3, 2]
» placés sur la tropéïde [σ_3), et qu'on réunisse tous ces fils par
» une extrémité sur un des points de la courbe (λ), on pourra

IVme MÉMOIRE. » faire marcher ce point sans qu'il cesse d'être placé sur la courbe » primitive, sans que les fils cessent d'être tous tendus, d'être à » chaque instant appliqués dans leur partie rectifiée sur un même plan » (Δ_1), normal à la courbe (λ), et dans leur partie pliée encore d'être » sur les tropiques [3, 2] qui leur appartiennent respectivement : » enfin, chaque fil dans ses positions successives devra parcourir » évidemment toute une développable (Δ_2) des normales de (λ).

» Il faudra donc que les parties des fils déjà rectifiées, n'altèrent » pas leurs positions respectives par la continuation de ce mouve- » ment; et par conséquent, que deux mêmes fils fassent constam- » ment entr'eux le même angle : donc aussi les surfaces dévelop- » pables que ces fils décrivent dans l'espace, font entr'elles un » angle invariable dans toute l'étendue de la courbe; de manière » que si deux fils sont un moment à angle droit, ils le seront tou- » jours, et les deux surfaces développables qu'ils engendreront, » seront pareillement partout à angle droit.

Des deux courbures d'une ligne courbe. » Si nous observons maintenant que la connaissance parfaite » d'une courbe à double courbure (1, 2) ne peut être donnée par » moins de deux surfaces développables qui la contiennent à la fois, » et que ces deux développables suffisent toujours à sa définition » complette, on verra que dans notre système général de trajec- » toires orthotomides, chaque courbe (1, 2) est déterminée par » une première développable, composée d'arêtes normales à (1, 2) » et à (S_1), puis par une seconde développable composée d'arêtes » normales à (1, 2) et à (S_2); ou, ce qui revient au même, com- » posée des normales de (1, 2) tangentes à (S_1). Ainsi donc, un » rayon de courbure de (S_2) est aussi le rayon de la courbure » qu'affecte sur (S_1) la ligne même de courbure de cette surface.

» Nous savons que la courbure des surfaces est déterminée en » un point lorsque les deux rayons de cette courbure sont dé-

» terminés pour ce même point; mais la courbure qui, sur la surface, IVme MÉMOIRE.
» caractérise les lignes de courbure, n'est point pour cela déter-
» minée; ainsi, quoique généralement ces lignes aient en chaque
» point une double courbure arbitrairement dirigée sur la surface,
» on peut toujours concevoir que ce point soit le sommet d'une
» surface du second degré, osculatrice à la primitive; et alors les
» lignes de courbure de la surface du second degré ne seront pas
» osculatrices à celles de la surface osculée, comme il paraît
» naturel de le penser; elles leur seront simplement tangentes.

» Il est évident, en effet, que le plan osculateur des lignes de
» courbure qui se croisent au sommet d'une surface du second
» degré, est le plan même de chacune des deux sections prin-
» cipales qui se croisent à ce sommet; mais en considérant la
» ligne de courbure (1, 2) sur (S_1), si par les extrémités de ses
» rayons de courbure tangents, l'un à (S_1), et l'autre à (S_2) au
» point donné, l'on mène une ligne droite, et que par ce point,
» on conçoive un plan perpendiculaire à cette droite, il sera le
» plan osculateur de la ligne de courbure (1, 2). Or, en général
» ce plan ne sera normal ni à (S_1), ni à (S_2), et ne prendra
» cette direction que dans les cas particuliers où l'un des rayons
» communs à la courbe (1, 2) et aux surfaces (S_1) ou (S_2), deviendra
» nul ou infini. Observons encore que le point d'intersection de
» la droite et de ce plan, est le centre de plus grande courbure de
» la ligne (1, 2), c'est-à-dire, le centre de son cercle osculateur.

» Cependant, il est souvent très-avantageux, et surtout dans les
» arts, de connaître la vraie courbure des lignes de courbure, et
» sa direction dans l'espace, parce qu'un élément curviligne d'une
» étendue médiocre, peut toujours se réduire à son cercle oscu-
» lateur, et même, si les cas où l'on se trouve l'exigent, cette con-
» naissance rend facile la description continue de ces lignes dans
» une étendue quelconque; mais, comme nous venons de le voir,

IVme MÉMOIRE. » il faut ajouter une donnée de plus à celles qui particularisent la » courbure d'une surface en un même point; j'ajouterai que cette » donnée dépend déjà généralement du troisième ordre : au reste, » nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

Celles des lignes de courbure sont complettement données par notre système général de surfaces orthotomides.

» Lors donc que pour obtenir les lignes de courbure d'une » surface (S_1), nous la combinons avec deux autres genres de » surfaces (S_2) et (S_3), ce n'est point un vain échafaudage que nous » élevons pour en rendre seulement quelques parties utiles, et » faire parade des autres. La surface (S_2), par exemple, a sa cour- » bure intimement liée avec celle de $(1, 2)$, ligne de courbure de » (S_1), et sert à completter la détermination de cette ligne. De même » la surface (S_3) sert à la détermination de l'autre ligne de courbure » $(1, 3)$ de (S_1), puisque $(1, 2)$ est par rapport à (S_2), comme » $(1, 3)$ par rapport à (S_3), une ligne de courbure. Le système » général que nous avons considéré jusqu'ici, paraît donc très- » propre à faire connaître et la courbure des surfaces, et celle de » leurs lignes de courbure dans chacun des éléments dont cette » courbure se compose; et c'est, à mon avis, l'un des plus » grands avantages que puisse offrir ce moyen de trouver les » lignes de courbure des surfaces, si d'ailleurs il est susceptible » d'en offrir quelques-uns.

§ III.

Application des propriétés des surfaces trajectoires orthogonales, à la recherche des lignes de courbure des surfaces en général, et particulièrement des surfaces du second degré.

Dans le paragraphe précédent, je me suis attaché spécialement à déduire comme des conséquences particulières d'une proposition plus générale encore, les propriétés générales de la courbure des

surfaces. Il semble que dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété de faits particuliers.

Utilité de ce système dans la recherche des lignes de courbure des surfaces.

On vient de voir que le système général de trajectoires orthotomides n'est pas moins que celui des surfaces et de leurs normales, propre à nous faire connaître et les lignes de courbure et tout ce qui tient à la courbure des surfaces; cependant il faut avouer que souvent le système où deux des trois groupes sont des surfaces développables, est plus simple et plus facile à considérer que le système général: si cela était toujours vrai, les résultats que nous avons exposés ne seraient d'aucune utilité dans leurs applications, et l'on ne tirerait nul avantage de ce qu'ils peuvent offrir de plus étendu. Mais il s'en faut de beaucoup que les choses soient ainsi; dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus difficiles à traiter, les surfaces développables, soit par un degré plus élevé, soit par leur nature particulière, sont moins aisées à discuter que d'autres surfaces qui seraient pourtant à double courbure, et qui n'en doivent pas moins alors être préférées.

Exemple offert par les surfaces du second degré.

La recherche des lignes de courbure des surfaces du second degré, en nous offrant un exemple étendu et remarquable de la méthode que nous proposons, fera voir qu'il est en effet des systêmes de surfaces à double courbure, beaucoup plus avantageux que celui des surfaces développables des normales; et c'est, si je ne me trompe, parce que cette méthode offre une infinité de solutions différentes, qu'elle peut être susceptible de quelque élégance. Ce sera d'ailleurs à saisir dans chaque cas le système le

IVme MÉMOIRE. plus avantageux, que consistera toute l'adresse de celui qui se proposera de l'employer.

Pour déterminer les lignes de courbure des surfaces du second degré, d'après les moyens généraux que nous venons de présenter, nous allons nous demander quel est le plus simple ordre de surfaces susceptibles de couper à angle droit la surface quelconque du second degré (Σ_1), dans toute l'étendue de leur intersection avec elle. Nous formerons ensuite un système de surfaces orthotomides, composé, comme nous l'avons dit, de trois groupes différents, mais tels que la surface du second degré que nous considérons, se trouve faire partie de l'un d'eux. Les intersections de cette surface avec celles de chacun des deux groupes qui lui sont étrangers, seront ses lignes de plus grande et de moindre courbure.

Nous savons qu'un plan ne peut, dans une infinité de positions différentes, couper partout à angle droit une surface du second degré, si ce n'est dans les cas particuliers où celle-ci serait développable, ou de révolution; dans tous les autres cas, il n'y a qu'un nombre déterminé de plans qui puissent jouir d'une semblable propriété, deux seulement pour le paraboloïde et trois pour les surfaces ayant un centre, comme l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes. Les surfaces du second groupe et celles du troisième, ne peuvent donc pas toutes être planes, lorsque dans le premier groupe se trouve la surface générale du second degré (Σ_1).

Orthotomie de deux surfaces du second degré.

Puisque la surface du premier degré ne peut être employée dans ce cas, ayons recours à celle qui la suit immédiatement dans l'ordre de la simplicité et de la facilité : demandons-nous si les surfaces du second et du troisième groupe, ne pourraient pas elles-mêmes être du second degré. Comparons seulement une surface du second degré (Σ_2) avec la primitive (Σ_1); et voyons si ces deux surfaces peuvent se couper à angle droit dans toute l'étendue de leur commune intersection. Il faut pour cela que nous considérions les

positions respectives de leurs plans tangents : voyons donc comment IVme MÉMOIRE. nous pourrons y parvenir.

Tout plan tangent à la sphère rencontre trois axes coordonnés rectangulaires partis du centre, à des distances de ce centre qui sont une troisième proportionnelle à l'ordonnée correspondante et au rayon : c'est ce que la considération d'un seul triangle rectangle fait voir immédiatement. Ces trois distances sont ce que nous avons appelé les *soutangentes* du plan tangent. (Voyez la note III.)

Mais dans les courbes du second degré, la soutangente est la même pour la même abscisse, lorsque l'axe des abscisses est le même : donc la valeur que nous venons d'indiquer pour les soutangentes de la sphère, donne aussi la valeur des soutangentes pour les surfaces du second degré. Ces soutangentes sont chacune la troisième proportionnelle entre l'abscisse et la moitié de l'axe correspondant sur lequel est la soutangente.

Donc les valeurs inverses de ces soutangentes sont les ordonnées mêmes, divisées par le quarré des demi-axes correspondants.

Or, pour que deux surfaces soient à angle droit en un point, nous avons démontré (note III de ce Mémoire) que la somme des produits des valeurs inverses correspondantes, que cette somme, disons-nous, doit toujours être nulle. Donc, si deux surfaces du second degré ayant mêmes plans principaux, se coupent à angle droit en un certain point, lorsqu'on prendra la somme du quarré des rapports de chaque ordonnée de ce point au produit des demi-axes parallèles à la même ordonnée, cette somme sera nulle.

Mais on peut toujours concevoir un cône du second degré, dont les coordonnées de chaque point satisfassent à une telle condition. Ce cône passera donc à la fois par tous les points où les deux surfaces du second degré se coupent à angle droit. Ce cône aura

 mêmes plans principaux que les deux surfaces générales du second degré : donc il coupera chacune d'elles suivant une courbe qui, projetée sur ces plans, ne sera que du second degré. De plus, les sommets de ces projections seront donnés par les points placés sur les plans principaux : cela est évident.

Si nous exigeons maintenant que les deux surfaces du second degré se coupent à angle droit seulement sur les plans principaux, sur ces plans aussi les mêmes points appartiendront au cône lieu de tous les points où cette intersection se fait à angle droit. Alors le cône et les deux surfaces que nous considérons se couperont suivant trois courbes qui, projetées sur les trois plans principaux, seront du second degré, et de plus, auront mêmes sommets (*): donc elles seront identiques. *Donc, enfin, les deux surfaces du second degré se couperont à angle droit dans toute l'étendue de leur intersection, si seulement leurs sections principales se coupent à angle droit.*

Formation du système général d'orthotomides du second degré.

Maintenant que nous connaissons la condition nécessaire pour que la surface générale du second degré (Σ_1) soit partout coupée à angle droit par une autre surface du même ordre, voyons comment nous formerons un système général de surfaces trajectoires orthogonales du second degré.

Pour construire la surface (Σ_2) qui doit partout couper à angle droit (Σ_1), nous prendrons un point quelconque a sur le grand axe OA de (Σ_1) fig. 12, et nous tracerons sur les deux plans principaux passant par cet axe, les sections principales de (Σ_2); lesquelles couperont par conséquent à angle droit, les sections correspondantes de (Σ_1) : ainsi par la connaissance d'un seul point de (Σ_2), cette

(*) Ou qui du moins auront deux sommets et deux points communs; car cette condition détermine entièrement une courbe du second degré.

surface sera complettement déterminée. Mais quand les deux courbes αMi, AMI, fig. 12, du second degré, sont conaxiques et se coupent à angle droit; F et f étant les foyers de l'une, les rayons vecteurs FM, fM forment au point M le même angle avec la courbe AI, et par conséquent avec sa normale Mj, tangente à αMi : donc F et f sont aussi les foyers de αMi : donc, enfin, deux courbes du second degré conaxiques et orthotomiques ont les mêmes foyers; et réciproquement, deux courbes du second degré dont les foyers sont identiques, se coupent nécessairement à angle droit. On voit par là que *les sections principales de* (Σ_1) *et* (Σ_2) *doivent avoir les mêmes foyers, et par conséquent même excentricité.* Or, la demi-excentricité des courbes du second degré est égale à la différence des quarrés de leurs axes : donc, enfin, si les deux surfaces du second degré (Σ_1), (Σ_2) concentriques, et de plus ayant mêmes plans principaux, sont seulement liées entr'elles par la condition d'avoir *équidifférents les quarrés de leurs axes mêmement dirigés*; elles se couperont *à angle droit* dans toute l'étendue de leur intersection.

Discussion de ce système.

Examinons maintenant la forme et la position de ces diverses surfaces du second degré, dont les quarrés des axes varient par des augmentations ou par des diminutions égales.

Premier groupe. Ellipsoïdes.

Nous pouvons d'abord supposer que les quarrés des trois axes s'accroissent assez pour devenir tous positifs; et comme rien ne limite cet accroissement, il n'est aucun point de l'espace, quelle que soit sa distance au centre commun, qui ne puisse être regardé comme appartenant à l'une de ces surfaces : il est d'ailleurs évident qu'elles sont toutes des ellipsoïdes.

Si nous supposons ensuite que les quarrés des axes diminuent jusqu'à ce que le plus petit des trois devienne nul, les surfaces ne cesseront pas d'être des ellipsoïdes; mais elles s'aplatiront de



IVme MÉMOIRE. plus en plus pour se confondre enfin avec le plan des grandes sections principales.

Ellipse limite.

Lorsque le petit axe devient nul, l'ellipsoïde devient simplement l'aire d'une ellipse dont les sommets sont respectivement aux foyers de toutes les moyennes et de toutes les petites sections principales; tandis que les foyers mêmes de cette ellipse sont aux foyers communs des grandes sections principales.

Le quarré du petit axe devenu nul, si les quarrés des axes diminuent encore, le quarré du petit axe deviendra négatif; et, tandis que les quarrés des deux autres axes continueront à décroître, ce dernier quarré prendra des valeurs absolues de plus en plus considérables.

Second groupe.

Hyperboloïdes hyperboliques.

Tant que le quarré du moyen axe n'aura pas diminué jusqu'au point d'être devenu négatif ou nul, toutes les valeurs que pourront prendre les axes entre l'évanouissement du plus petit et du moyen axe; toutes ces valeurs, dis-je, correspondront à des hyperboloïdes hyperboliques ou à une nappe; et, comme les ellipsoïdes, ces hyperboloïdes rempliront tout l'espace de leurs points.

Hyperbole limite.

Quand le moyen axe deviendra nul, l'hyperboloïde à une nappe s'aplatira sur le plan des moyennes sections principales, et ne sera plus que l'aire d'une hyperbole dont les sommets sont aux foyers communs des grandes sections principales, et dont les foyers mêmes sont aux foyers des moyennes sections principales.

Troisième groupe.

Hyperboloïdes elliptiques.

Enfin, les quarrés des axes continuant encore à décroître, appartiendront à l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes, et le groupe complet de ces nouveaux hyperboloïdes remplira l'espace de ses points, comme le font séparément les groupes des ellipsoïdes et des hyperboloïdes que nous venons de former.

Il n'est donc aucun point de l'espace qu'on ne puisse considérer

comme appartenant à la fois à un ellipsoïde, à un hyperboloïde hyperbolique et à un hyperboloïde elliptique du système général des surfaces trajectoires orthogonales, où se trouve comprise comme individu, la surface primitive du second degré : cette surface ayant d'ailleurs la forme la plus générale. IVme MÉMOIRE.

Discussion des lignes de courbure des surfaces du second degré.

Le système général des orthotomides du second degré est donc composé de trois groupes particuliers bien distincts. Le premier formé par des ellipsoïdes, le second par des hyperboloïdes hyperboliques, le troisième par des hyperboloïdes elliptiques. D'après ce que nous avons démontré sur les propriétés générales des surfaces trajectoires orthogonales ou des orthotomides, toutes les lignes d'une même courbure des surfaces d'un de ces groupes, sont donc aussi les lignes d'une même courbure des surfaces d'un second groupe : ce sont les lignes suivant lesquelles ces surfaces viennent se croiser à angle droit.

Ainsi toutes les lignes d'une des courbures de l'hyperboloïde à une nappe ou hyperbolique, sont aussi celles d'une des courbures de l'ellipsoïde; toutes les lignes de courbure de l'hyperboloïde elliptique sont celles de l'autre courbure de l'ellipsoïde : enfin, toutes les lignes de la seconde courbure des hyperboloïdes des deux genres, sont communes à ces hyperboloïdes de différent genre.

Je dirais donc, si je pouvais parler ainsi : Les lignes d'une des courbures des hyperboloïdes expriment ce qu'il y a d'ellipsoïdal, les autres d'hyperboloïdal dans ces surfaces; et les lignes des deux courbures de l'ellipsoïde sont précisément ce qui le lie avec les deux autres espèces de surfaces du second degré : nous montrerions ainsi comment et jusqu'à quel point notre système de trajectoires orthogonales caractérise et décompose la courbure des surfaces.

Maintenant que nous avons ramené la recherche des lignes de courbure des surfaces du second degré, à la détermination des

IVme MÉMOIRE. simples intersections de ces surfaces avec d'autres surfaces du même ordre; cette opération étant d'ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà dit, infiniment plus élémentaire qu'une recherche directe, il va nous être extrêmement facile de connaître et la nature, et la forme, et les propriétés de ces lignes.

L'intersection de deux surfaces du second degré, projetée sur un plan quelconque, est généralement une courbe du quatrième degré: mais quand les deux surfaces sont à la fois symétriques par rapport au plan de projection, les points de leur intersection se confondent deux à deux en se projetant sur ce plan, et le degré de la courbe s'abaisse par conséquent de la moitié.

Leurs projections sur les plans principaux sont des courbes du second degré.

Il suit de là que les lignes de courbure des surfaces du second degré se projettent sur chacun des plans principaux suivant des lignes courbes du second degré, dont les axes sont placés sur les axes mêmes de la surface.

Jusqu'ici nous n'avons envisagé que le système de trajectoires orthogonales, formé par des surfaces du second degré. Nous avons déterminé tout ce qui peut être relatif à la composition générale de ce système, et nous venons de reconnaître à quel genre appartiennent les courbes de trajection qu'il présente. Il nous reste à considérer le système de lignes trajectoires orthotomiques, formé par les courbes intersections de ces surfaces. La détermination des divers éléments de ce nouveau système, sera celle même des lignes de courbure des surfaces du second degré; et comme tous les genres possibles de ces surfaces sont à la fois renfermés dans un seul des systêmes généraux que nous venons de former, l'examen d'un seul système de trajectoires orthotomiques du second degré nous fera connaître les lignes de courbure de tous les genres possibles de surfaces du même ordre.

Pour plus de clarté, nous allons démontrer avant tout, un

théorême presqu'évident par lui-même, et que connaissent ceux IVme MÉMOIRE.
qui ont les moindres notions de géométrie descriptive. Nous en tirerons ensuite une conséquence qui fera connaître d'un seul coup d'œil, le système général des lignes de courbure des surfaces du second degré.

Chaque normale d'une surface est aussi la normale de toutes les courbes tracées sur cette surface, à partir du point d'application. Mais si l'une de ces courbes est supposée plane et horizontale, toutes ses normales, à partir du même point d'application, vont être dans un plan vertical unique : leur projection *unique* sur le plan horizontal de la courbe, sera donc la normale proprement dite de cette courbe. Donc, si l'on coupe la surface par un plan de projection quelconque, en chaque point de la section, la normale de la surface aura pour projection la normale de la section même.

Considérons maintenant dans notre système général de surfaces trajectoires orthogonales du second degré (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), une surface (Σ_1); elle est partout rencontrée à angle droit par quelqu'une des courbes (2, 3) intersections des (Σ_2) et des (Σ_3). Donc si par un point donné de (Σ_1), on fait sur elle une section plane, la courbe orthotomique (2, 3) qui passe par ce point se projettera sur le plan coupant, normalement à la section.

Pour fixer les idées, supposons horizontal un des plans principaux du système des surfaces (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3). Si par un point d'une courbe d'intersection (2, 3), on mène un plan horizontal, il coupera la surface (Σ_1) passant par ce point, suivant une courbe qui projetée horizontalement, devra couper à angle droit la projection horizontale de (2, 3).

Projections des lignes trajectoires orthotomiques, ou lignes de courbure des surfaces du second degré.

Mais ces deux projections sont deux courbes *du second degré*, ayant leurs axes dirigés sur les axes mêmes de la surface (Σ_1) : donc, quand l'une d'elles est une ellipse, l'autre est nécessairement une hyperbole, et réciproquement.

IVme MÉMOIRE. Donc les lignes de courbure (2, 3) communes aux surfaces du second degré (Σ_2) et (Σ_3), sont en projection sur les plans principaux, des ellipses ou des hyperboles, suivant que les sections principales correspondantes des (Σ_1) sont des hyperboles ou des ellipses (*).

Donc, en général, pour connaître la nature des courbes projections des (2, 3), ou des (3, 1), ou des (1, 2), il suffit de voir si les sections principales des (Σ_1), des (Σ_2), des (Σ_3) sont des *ellipses* ou des *hyperboles*; car alors les projections des (2, 3), des (3, 1), des (1, 2) seront sur les plans de ces sections des *hyperboles* ou des *ellipses* : rien n'est plus simple qu'un semblable critère.

Appliquons-le. Supposons que les (Σ_1) sont des ellipsoïdes, les (Σ_2) des hyperboloïdes à une nappe, et les (Σ_3) des hyperboloïdes à deux nappes.

Pour mettre de la méthode dans cet examen, nous envisagerons successivement chacun des groupes de lignes dont se compose le système des courbes orthotomiques ; nous considérerons d'abord le groupe (1, 2) dont chaque ligne est l'intersection d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde hyperbolique ou à une nappe. Nous passerons ensuite au groupe (1, 3) dont chaque ligne est formée par l'intersection d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde elliptique ou à deux nappes. Nous nous occuperons enfin du dernier groupe (2, 3) dont chaque ligne est formée par l'intersection d'un hyperboloïde hyperbolique avec un hyperboloïde elliptique.

(*) En effet, nous avons fait voir, fig. 12, que deux courbes du second degré AMA, aMi ayant leurs axes sur les mêmes lignes, ne pouvaient pas se couper à angle droit sans avoir mêmes foyers F et *f*. Suivant donc que la somme ou la différence des mêmes rayons vecteurs FM, *f*M sera constante, on aura une *ellipse* ou une *hyperbole*. Or, ce sont les deux courbes du second degré qui se coupent à angle droit.

IVme MÉMOIRE.

Premier groupe d'orthotomiques (1, 2).

Les courbes (1, 2) sont partout perpendiculaires aux surfaces (Σ_3), c'est-à-dire, aux hyperboloïdes à deux nappes. Mais dans ces hyperboloïdes, les sections parallèles à la grande et à la moyenne section principales sont des hyperboles; tandis que les sections parallèles à la troisième sont des ellipses.

Donc, I°. les courbes (1, 2), c'est-à-dire, les lignes de courbure communes à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde hyperbolique, se projettent suivant des ellipses sur les plans de la grande et de la moyenne section principales, mais se projettent suivant des hyperboles sur le troisième plan principal.

Second groupe (1, 3).

Passant ensuite aux (1, 3); ces courbes étant partout perpendiculaires aux (Σ_2), c'est-à-dire aux hyperboloïdes hyperboliques ou à une nappe, et la grande section principale de cet hyperboloïde étant seule elliptique; concluons,

II°. Que les courbes (1, 3), c'est-à-dire, les lignes de courbure communes à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes, se projettent sur le plan de la grande section principale, suivant une hyperbole, et sur les deux autres, suivant des ellipses.

Troisième groupe (2, 3).

Enfin, les (2, 3) étant partout perpendiculaires aux surfaces (Σ_1), c'est-à-dire, aux ellipsoïdes, et toutes les sections de l'ellipsoïde, projetées sur des plans quelconques étant elliptiques; concluons,

III°. Que les courbes (2, 3), c'est-à-dire, les lignes de courbure communes aux deux genres d'hyperboloïdes, projetées sur les trois plans principaux, sont des hyperboles.

En réunissant les divers résultats auxquels nous venons d'être conduits, nous allons former un tableau général qui présentera le système des projections des lignes de courbure de tous les genres différents de surfaces du second degré, rapportées à leur centre.

IVme MÉMOIRE.

Forme des projections des lignes de courbure des surfaces du second degré.

(Σ_1)... ELLIPSOÏDE.		
PROJECTION sur le plan principal.	PREMIÈRE COURBURE.	SECONDE COURBURE.
Des grandes sections.	Elliptique.	Hyperbolique.
Des moyennes *id.*	Elliptique.	Elliptique.
Des petites *id.*	Hyperbolique.	Elliptique.
Orthotomiques.	(1, 2)	(1, 3)

(Σ_2)... HYPERBOLOÏDE HYPERBOLIQUE.		
PROJECTION sur le plan principal.	PREMIÈRE COURBURE.	SECONDE COURBURE.
Des grandes sections.	Elliptique.	Hyperbolique.
Des moyennes *id.*	Elliptique.	Hyperbolique.
Des petites *id.*	Hyperbolique.	Hyperbolique.
Orthotomiques.	(2, 1)	(2, 3)

(Σ_3)... HYPERBOLOÏDE ELLIPTIQUE.		
PROJECTION sur le plan principal.	PREMIÈRE COURBURE.	SECONDE COURBURE.
Des grandes sections.	Hyperbolique.	Hyperbolique.
Des moyennes *id.*	Elliptique.	Hyperbolique.
Des petites *id.*	Elliptique.	Hyperbolique.
Orthotomiques.	(3, 1)	(3, 2)

Après avoir fait connaître la forme des lignes de courbure par celle de leurs diverses projections, il reste à considérer ces mêmes lignes dans les relations de leurs positions respectives, et surtout dans les limites qui, si je puis parler ainsi, les séparent et les unissent à la fois. Pour cela, revenons encore à notre système général de surfaces trajectoires orthotomides du second degré.

Des courbes limites des trois groupes.

La surface du second degré dont le petit axe a son quarré égal à zéro, sépare, sans solution de continuité, toutes les surfaces de cet ordre dont les trois axes ont leur quarré positif, d'avec celles dont le petit axe seulement a son quarré négatif; cela est évident. La surface du second degré dont le moyen axe est nul, sépare de même les surfaces dont deux axes ont leur quarré positif, et celles qui n'ont qu'un seul axe dont le quarré soit positif.

Ellipse.

Dans le premier cas, la surface devient une aire plane terminée, comme nous l'avons dit plus haut, par une ellipse dont les sommets sont aux foyers des moyennes et des petites sections principales, et dont les foyers mêmes sont aux foyers de la grande section principale.

Cette courbe est la limite commune des ellipsoïdes et des hyperboloïdes hyperboliques du système général. Elle est embrassée par toutes les grandes sections des ellipsoïdes, et elle embrasse au contraire en entier toutes les grandes sections des hyperboloïdes hyperboliques. A mesure que les axes des ellipsoïdes décroissent, et que ceux des hyperboloïdes hyperboliques s'accroissent, ces deux surfaces s'aplatissent pour se rapprocher de leur commune limite qu'elles resserrent de plus en plus sans pouvoir jamais l'atteindre qu'au moment où leur petit axe s'évanouissant, elles deviennent l'une et l'autre une aire plane, terminée par l'ellipse qui les sépare.

Si donc je voulais parcourir l'*hyperboloïde à deux nappes*, en marchant successivement sur les traces qu'y laissent l'ellipsoïde

IVme MÉMOIRE.

ou l'autre hyperboloïde, je tournerais sans cesse autour de cette ellipse limite ; plus les secondes surfaces suivant lesquelles je me dirigerais, seraient aplaties, plus je m'approcherais de la limite, mais sans pouvoir jamais l'atteindre qu'en marchant sur le plan même qui sépare les ellipsoïdes des hyperboloïdes à une nappe.

Lieu des ombilics de tous les hyperboloïdes elliptiques.

Ainsi toutes les lignes d'une des courbures de l'hyperboloïde à deux nappes, tourneront dans un sens autour de l'ellipse limite, de manière à s'en approcher autant qu'on voudra, mais sans pouvoir passer par elle ; toutes les lignes de la seconde courbure se développent pareillement autour de cette ellipse, sans jamais passer par elle, quoiqu'en s'en approchant autant qu'on voudra. Cette courbe ne marque donc autre chose sur l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes, que les points désignés sous la dénomination générale d'*ombilics* : d'où l'on voit qu'*en faisant passer une courbe du second degré par les foyers communs des moyenne et petite sections principales, elle coupera chaque hyperboloïde elliptique en quatre points, dont chacun est un des ombilics de cette surface*. Il est également facile de voir, par la seule inspection du système général des trajectoires orthotomiques, que cette surface ne saurait avoir d'autres ombilics.

Hyperbole.

Lorsque dans le système général d'orthotomides du second degré, le moyen axe s'évanouit, le quarré du petit axe est devenu négatif ; la surface se réduit, sur le plan des moyennes sections, à une aire terminée par l'hyperbole dont les sommets et les foyers sont aux foyers des grandes et des moyennes sections principales du système. Cette courbe est la limite qui sépare les hyperboloïdes hyperboliques d'avec les autres hyperboloïdes ; elle est embrassée par toutes les moyennes sections des hyperboloïdes elliptiques, et elle embrasse au contraire en entier toutes les moyennes sections

des hyperboloïdes hyperboliques. A mesure que les axes des hyperboloïdes hyperboliques décroissent, et que ceux des hyperboloïdes elliptiques s'accroissent, ces surfaces s'aplatissent pour s'approcher de leur limite qu'elles resserrent de plus en plus, sans pouvoir l'atteindre que quand le moyen axe s'évanouissant, elles deviennent l'une et l'autre une aire plane circonscrite par l'hyperbole qui les sépare. IVe MÉMOIRE.

Lieu des ombilics de tous les ellipsoïdes.

Nous pouvons voir actuellement, par des considérations analogues à celles que nous venons d'employer pour l'hyperboloïde elliptique ou à deux nappes, que si nous marchons *sur l'ellipsoïde* en nous dirigeant suivant les différents hyperboloïdes de l'un ou l'autre genre, nous tournerons, dans des directions normalement opposées, autour de l'hyperbole qui sépare ces genres différents d'hyperboloïdes, et de manière à pouvoir en approcher autant que nous voudrons, mais sans pouvoir passer par cette courbe limite, qu'en marchant sur le plan qui à la fois unit et sépare les hyperboloïdes des deux genres. De là nous conclurons que si, dans le plan de la moyenne section des ellipsoïdes, on construit une hyperbole dont les sommets soient aux foyers de la grande section principale, et les foyers aux foyers de la moyenne section, les quatre points où l'hyperbole coupera l'ellipsoïde, seront autant d'ombilics de cette surface, et qu'enfin cette surface n'en peut avoir un plus grand nombre.

Ainsi dans le système général des surfaces trajectoires orthotomides du second degré, tous les ellipsoïdes ont leurs ombilics placés sur l'hyperbole qui, dans le plan des moyennes sections, est la commune limite des hyperboloïdes hyperboliques et des hyperboloïdes elliptiques. Tous les hyperboloïdes elliptiques ont leurs ombilics placés sur l'ellipse qui, dans le plan des grandes sections principales, est la commune limite des ellipsoïdes et des hyperboloïdes hyperboliques. Enfin, les hyperboloïdes hyper-

IVme MÉMOIRE. boliques sont les seules surfaces du système qui n'aient point d'ombilics.

Relation des deux courbes limites.

Les deux courbes, lieux des ombilics du système général, ont entr'elles une relation extrêmement remarquable; leurs sommets et leurs foyers sont placés aux foyers mêmes des grande et moyenne sections principales : elles sont telles toutes deux que les foyers de l'une servent à l'autre de sommets, et réciproquement; tandis que d'ailleurs elles sont placées sur deux plans perpendiculaires entr'eux.

Tous les ombilics des ellipsoïdes sont autant de *foyers* de la courbe lieu des ombilics des hyperboloïdes à deux nappes, et réciproquement.

D'après un théorême général que nous avons fait connaître dans un Mémoire qui devait être inséré dans les Journaux de l'École Polytechnique (*), il suit que la courbe lieu des ombilics des ellipsoïdes, a pour autant de foyers tous les points de la courbe des ombilics de l'hyperboloïde elliptique, et réciproquement. C'est-à-dire, que si à chaque point de cette dernière courbe, on fixait un fil inextensible; puis qu'un point mobile, arbitrairement placé sur la première courbe, réunît à la fois tous ces fils de manière à les tendre tous, et que ce point dût marcher ensuite dans l'espace de manière à faire varier ensemble d'un même alongement ou d'un même raccourcissement chacun des fils. Premièrement, le mouvement de ce point serait possible et aurait lieu sans qu'aucun des fils cessât d'être tendu. Secondement, le point mobile tracerait dans l'espace l'ellipse même, lieu des ombilics de l'ellipsoïde. De plus, dans chacune des positions du point mobile, le faisceau des fils inextensibles formerait un cône droit circulaire, dont l'axe serait précisément la tangente à la courbe des ombilics des ellipsoïdes, etc.

(*) Voyez la Correspondance Polytechnique, n° 2, 1er vol. et n° 5, 2e vol.

IVme MÉMOIRE.

Moyen de trouver immédiatement les ombilics des surfaces du second degré.

Ces propriétés générales nous fournissent, pour la position des ombilics des surfaces du second degré, une détermination trop simple pour que nous ne l'exposions pas ici. Si l'on prend la somme de l'excentricité et du demi-grand axe de la grande section principale d'un ellipsoïde, et qu'on la porte, à partir du foyer de la moyenne section et dans le plan de cette section, sur la surface même de l'ellipsoïde, l'extrémité de cette distance marquera quatre points sur la surface de l'ellipsoïde; ce seront précisément les quatre ombilics. En second lieu, si l'on prend la somme de l'excentricité de la moyenne section et du demi-grand axe de l'hyperboloïde elliptique, et qu'à partir des foyers de la grande section principale, on la porte sur cette section, on obtiendra ainsi quatre points qui seront les quatre ombilics de l'hyperboloïde elliptique. (Voyez la note IV.)

Système général d'orthotomides paraboloïdes.

Jusqu'ici nous avons supposé que les surfaces du système général de trajectoires du second degré, devaient être des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes; celles d'un des groupes pourraient cependant devenir des paraboloïdes. Dans ce cas, les surfaces des trois systêmes deviendraient toutes en même temps des paraboloïdes; les ellipsoïdes, ainsi que les hyperboloïdes elliptiques, deviendraient des paraboloïdes elliptiques dirigés en sens contraires; les hyperboloïdes hyperboliques seuls deviendraient des paraboloïdes hyperboliques. Les lignes des ombilics seraient alors des paraboles égales, placées dans des plans orthogonaux, de manière à ce que le foyer de l'une fût au sommet de l'autre, et réciproquement; enfin, ces foyers seraient à la fois ceux des paraboles principales de tout le systême. D'où l'on voit immédiatement que le paraboloïde elliptique a toujours deux ombilics réels, et que le paraboloïde hyperbolique n'en saurait avoir aucun.

Leurs ombilics.

La méthode que nous venons de donner pour obtenir les om-

 bilics des ellipsoïdes et des hyperboloïdes elliptiques du système général d'orthotomides du second degré, quoique très-simple, peut être rendue plus simple encore et plus générale (Voyez la note IV). Ainsi, pour les paraboloïdes, les ombilics sont placés sur le plan des petites sections principales de chaque groupe, et la distance de l'ombilic au foyer des moyennes sections égale la distance de l'autre foyer au sommet du paraboloïde.

En supposant dans le système général des orthotomides du second degré, que les grands axes deviennent infinis ; le tableau complet des projections des lignes de courbure de ces surfaces, présentera immédiatement le tableau des projections des lignes de courbure des paraboloïdes des deux genres.

Forme des projections des lignes de courbure des paraboloïdes.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.		
PROJECTION sur le plan principal.	PREMIÈRE COURBURE.	SECONDE COURBURE.
Des grandes sections.	Parabolique.	Parabolique.
Des moyennes *id.*	Parabolique.	Parabolique.
Des petites *id.*	Hyperbolique.	Elliptique.
PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.		
PROJECTION sur le plan principal.	PREMIÈRE COURBURE.	SECONDE COURBURE.
Des grandes sections.	Parabolique.	Parabolique.
Des moyennes *id.*	Parabolique.	Parabolique.
Des petites *id.*	Hyperbolique.	Hyperbolique.

Analogies singulières entre les lignes de courbure des surfaces du second degré et les foyers des sections principales

On doit voir que les foyers des lignes et des surfaces du second degré jouent un grand rôle dans la détermination des lignes de courbure de ces surfaces et dans la fixation des limites de ces lignes. Ces diverses grandeurs graphiques doivent cependant sembler au premier coup d'œil, susceptibles d'avoir entr'elles bien peu d'analogie. Mais souvent les choses nous paraissent étrangères l'une à l'autre, seulement parce que leurs rapprochements ne se sont point encore offerts à nous; elles s'unissent dans notre esprit dès qu'elles nous sont présentées sous leurs rapports les plus naturels; et, si je ne me trompe, c'est à saisir dans chaque cas ces relations nécessaires, mais plus ou moins cachées, existantes entre les quantités que l'on considère, que consiste la vraie métaphysique de la science.

Monge a rendu la théorie des lignes de courbure très-importante par l'application qu'il en a faite à la coupe des pierres. Il a montré que dans la construction des voûtes, les voussoirs qui les composent doivent se terminer à la surface intérieure de la voûte, suivant des lignes de courbure de cette surface, et se toucher dans toute l'étendue de leurs *joints* suivant les surfaces développables des normales à la voûte, qui s'appuient sur cette ligne de courbure. Or, tous ses résultats ne sont pas seulement applicables aux voûtes, mais encore à toutes les autres parties des édifices. Enfin, passant à des exemples particuliers, le même géomètre a fait voir combien les surfaces du second degré, par l'élégance et la simplicité de leur forme et de celle de leurs lignes de courbure, sont propres à l'architecture; nous ajouterons à tous les arts en général.

Si la recherche des lignes de courbure de quelques surfaces peut être intéressante pour les arts, pour la géométrie, pour l'analyse même que cette science rend sensible par ses images, c'est donc pour les surfaces du second degré. Mais cette recherche

IVme MÉMOIRE. serait incomplette, si, déterminant seulement d'une manière rigoureuse la figure de ces lignes en fixant la position absolue de leurs différents points, elle ne donnait en outre un moyen facile, élémentaire, de les construire; car dans beaucoup de cas, la difficulté seule ou la complication de cette opération, suffirait pour en proscrire l'usage, et rendrait ainsi sans utilité ces lignes et les surfaces qui leur appartiennent, quels que fussent d'ailleurs les avantages qu'elles pourraient présenter.

Pour completter ce que nous avons dit sur les lignes de courbure des surfaces du second degré, il nous reste donc à présenter un moyen simple de les décrire; et comme le mode de description par un mouvement continu est celui qui allie le plus la facilité à la précision, il faut que ce mode puisse être appliqué aux lignes de courbure des surfaces du second degré, pour qu'elles puissent devenir vraiment utiles aux arts. C'est ce que nous allons essayer de faire.

Description des surfaces du second degré et de leurs lignes de courbure, par un mouvement continu.

Si, comme nous l'avons déjà dit dans le premier Mémoire de cette théorie, on prend sur une droite mobile trois points 1, 2, 3, et que cette droite soit constamment assujétie à avoir le point 1 sur un premier plan fixe (I), le point 2 sur un second plan (II), et le troisième 3 sur un troisième plan (III), fixe comme les deux premiers; dans le mouvement arbitraire de cette droite, chacun de ses autres points devra décrire une surface du second degré; toutes ces surfaces seront concentriques; elles auront pour centre commun l'intersection des trois plans fixes, etc. (Voyez le Mémoire déjà cité, tome VII, cahier XIV des Journaux de l'École Polytechnique.)

Si les trois plans fixes se coupent deux à deux à angle droit, toutes les surfaces du second degré, engendrées par les points divers de la droite mobile, auront sur ces plans leurs trois sections

principales ; et les trois parties de la droite mobile comprises entre le point générateur et les points fixes 1, 2, 3, seront égales aux trois axes de la surface décrite par le point générateur.

Enfin si, au lieu de parcourir toute la surface du second degré, le point générateur ne devait décrire qu'une courbe déjà placée sur une surface du même ordre ayant mêmes plans principaux que la première, les points 1, 2, 3 de la droite mobile qui doivent respectivement rester sur les plans principaux (I), (II), (III), *y traceront des courbes du second degré ayant leurs axes dirigés sur ceux mêmes des deux surfaces.*

Ce cas est évidemment celui des lignes de courbure des surfaces du second degré, qui sont toujours les communes intersections de deux surfaces orthotomides du second degré, concentriques et ayant leurs axes mêmement dirigés.

Ainsi quand le point générateur de la droite mobile qui décrit une surface du second degré, ne parcourt qu'une des lignes de courbure de cette surface, la droite mobile trace sur chacun des plans principaux des courbes du second degré, dont les axes sont placés sur les axes mêmes de la surface.

Ces traces elles-mêmes peuvent être décrites par une droite mobile dont deux points déterminés s'appuient sur les deux axes de la trace qu'on veut construire, et ont respectivement pour distance au point générateur de la trace, les axes mêmes de cette courbe.

Si donc, dans le plan de chaque section principale, on conçoit ces droites mobiles secondaires, et qu'au point générateur de chacune d'elles soit fixé le point 1, 2 ou 3 assujéti à rester constamment sur le plan principal correspondant (I), (II), ou (III) que l'on considère, alors il n'y aura plus rien d'arbitraire dans la position de cette première droite mobile ; tous les mouvements du système de droites ainsi formé, seront devenus nécessaires, et

IVme MÉMOIRE. *quelque impulsion qu'on lui donne dans tous les sens possibles, elle fera toujours décrire au point générateur de la première droite mobile, la ligne de courbure de la surface primitive.* Quand on fera varier convenablement la longueur des parties des droites mobiles secondaires, c'est-à-dire, des droites appartenant aux traces de la première droite mobile sur les divers plans principaux, on changera de ligne de courbure, et on décrira ainsi successivement toutes les lignes de courbure possibles sur la même surface du second degré.

Les axes des diverses traces qui sur un même plan principal appartiennent aux lignes d'une même courbure, sont les coordonnées d'une courbe du second degré; et comme nous savons décrire ces courbes par un mouvement continu, nous en obtiendrons toujours facilement les coordonnées pour chaque point, et par conséquent, les parties des droites mobiles *secondaires*, c'est-à-dire, des droites qui doivent décrire les traces de la génératrice des lignes de courbure.

Qu'on substitue des règles à ces lignes droites mobiles, des rainures aux axes de la surface du second degré; qu'on supprime une des droites mobiles secondaires, comme superflue, et l'on aura la plus simple des machines à appareiller; ce sera cependant celle qui décrira les arêtes curvilignes des voussoirs de voûtes, terminées intérieurement par des surfaces du second degré quelconques; ou, pour parler le langage de la simple géométrie, celle qui décrira les lignes de courbure de la surface générale du second degré.

Il y aurait sans doute encore beaucoup de choses à dire sur la courbure des surfaces du second degré; le rapprochement et la comparaison de ses divers éléments conduirait à des résultats curieux, et qui pourraient souvent être utiles. Mais il nous semble que les principes généraux de la courbure de ces surfaces viennent

d'être exposés avec assez de détails pour rendre faciles ces rapprochements qui ne sont, après tout, que des conséquences plus ou moins immédiates, et toujours assez simples. Ne perdons pas de vue, d'ailleurs, le plan que nous nous sommes proposé de suivre; notre but a été de présenter sur la courbure des surfaces, quelques vues et quelques résultats généraux, mais non pas de parler avec détail de cas particuliers où l'on n'aurait à considérer que la courbure de quelques surfaces individuelles. Pour rendre sensibles les méthodes que nous avons exposées, nous avons cherché parfois à en faire des applications à quelques exemples. Mais des exemples ne sont pas des traités de l'objet particulier qu'ils présentent; on doit n'y voir que ce qui est absolument le propre de la chose que l'on considère, et nous serions nous-mêmes entrés dans beaucoup moins de détails en parlant des surfaces du second degré, si nous ne les eussions jugées propres à offrir un exemple à la fois simple, étendu et remarquable, de tout ce que nous avons pu dire de général sur la courbure des surfaces.

Système général d'orthotomides souvent préférable à celui des développables des normales dans la recherche des lignes de courbure.

Par des intersections de surfaces à double courbure, mais seulement du second degré, nous venons de déterminer tout ce qui peut être relatif à la connaissance complette des lignes de courbure de cet ordre. Nous avions cependant des surfaces d'une nature plus simple à employer dans cette détermination. Par exemple, dans notre système de trajectoires orthogonales, nous aurions pu prendre, pour premier groupe de surfaces, la surface générale du second degré et ses co-développantes; et pour les deux autres groupes, les surfaces développables des normales à ces surfaces. Mais au lieu d'avoir à considérer uniquement des surfaces du *second* degré, que nous savons parfaitement construire, et dont nous pouvons, dans chaque cas, déterminer immédiatement les

 communes intersections, nous aurions eu deux groupes de développables du *huitième* degré à combiner avec des surfaces à double courbure du *quatrième :* enfin, au lieu d'un système de trajectoires embrassant à la fois les trois espèces de surfaces du second degré, il eût fallu considérer successivement trois systèmes différents. Il est inutile de dire que dans ce cas-ci, les développables des normales employées à la recherche des lignes de courbure, auraient présenté le moyen le plus long et le plus compliqué : il n'eût pas pu, d'ailleurs, si je puis ainsi m'exprimer, décomposer les surfaces du second degré dans les formes de leur courbure, comme nous l'avons fait en suivant la marche que nous avons proposée.

Conclusion de ce Mémoire.

Au lieu de préférer toujours le système de trajectoires orthogonales développables pour parvenir à la connaissance des lignes de courbure des surfaces, il faudra donc dans chaque cas, ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut, porter toute son attention sur le choix des systèmes de surfaces trajectoires orthogonales, dans lequel on devra classer la surface individuelle dont on se propose d'obtenir les lignes de courbure. Plus ce choix sera heureux, plus les méthodes qui en naîtront deviendront simples et rapides, plus les résultats élégants et généraux ; et c'est, comme nous l'avons dit encore, cette indétermination même que présente la méthode exposée dans ce Mémoire, qui doit lui donner aux yeux des géomètres, le peu de prix qu'elle est susceptible d'avoir.

Enfin, le théorème qui sert de base à ce mode de recherches, semble ajouter quelque chose à la théorie des trajectoires orthogonales, en faisant connaître les conditions nécessaires pour que cette orthogonalité ait lieu dans les intersections des groupes de surfaces quelles qu'elles soient, conditions qui, si nous voulons parler le langage de l'analyse, ne sont autre chose que les conditions d'intégrabilité des équations différentielles des systèmes de

surfaces réciproquement orthogonales, nécessaires pour que ces équations appartiennent à des grandeurs graphiques, et puissent signifier quelque chose, conditions qui, si nous n'errons, n'avaient pas encore été données.

Au lieu de supposer que les surfaces des trois systèmes soient des trajectoires orthogonales, on pourrait supposer les surfaces d'un des systèmes seulement, orthogonales aux surfaces des deux autres systèmes, et les surfaces de ces deux derniers systèmes, assujéties à se couper sous un angle constant quelconque, ou bien, généralement, on pourrait supposer que les trois systèmes de surfaces se coupassent sous un angle quelconque, mais constant entre les surfaces de deux mêmes groupes; et dans ces cas, on trouverait de nouvelles conditions qu'il pourrait être intéressant d'examiner, mais dont nous ne pourrions pas nous occuper maintenant sans sortir de notre sujet.

Le problème des lignes trajectoires a été célèbre autrefois; les plus habiles géomètres en ont fait l'objet de leurs recherches, et ces recherches ont à la fois été utiles à la science qu'elles ont avancée, et à leurs auteurs qu'elles ont honorés. Mais les difficultés qui en faisaient alors tout le mérite, n'existent plus aujourd'hui. Les pas des sciences sont progressifs; ils sont lents et faibles d'abord; ils s'accélèrent ensuite, et s'agrandissent dans leur étendue, comme l'espace même qu'ils ont déjà parcouru. Les choses qui demandaient d'un siècle les efforts du génie, deviennent par ces efforts mêmes, des travaux sans difficulté pour le siècle suivant; et la gloire qui était le prix de la difficulté vaincue, disparaît avec elle dans la continuation des mêmes recherches. Mais alors, indépendamment même de leur utilité particulière, ces sujets ne cessent pas d'être intéressants pour nous; ils se rattachent à l'histoire de l'esprit humain, comme monuments des efforts des grands hommes pour le perfectionner. On aime à savoir quels objets pouvaient arrêter les premiers

 esprits de chaque siècle, ou du moins sembler dignes de leurs efforts. Ces efforts et leur succès fournissent la mesure de nos progrès, et parfois de notre décadence; je l'ai déjà dit, c'est l'histoire de l'esprit humain. Ainsi, quoique la théorie des trajectoires orthogonales n'offre plus maintenant de difficulté pour la généraliser dans l'espace, et lui donner toute l'extension dont elle est susceptible, elle est encore digne de l'attention des géomètres. Lorsqu'elle se lie ensuite avec d'autres théories importantes par elles-mêmes et par leurs applications, comme celles de la courbure des surfaces, elle acquiert un nouveau degré d'intérêt; et il faut, si je puis parler ainsi, qu'elle devienne dans la science, et pour tous ceux qui la cultivent, élémentaire et classique.

FIN DU QUATRIÈME MÉMOIRE.

NOTES PRINCIPALES

DU QUATRIÈME MÉMOIRE.

NOTE PREMIÈRE.

Idées sur la nomenclature géométrique.

Le mot *orthotomide* est tiré de la langue grecque; ses éléments ont passé dans mille expressions de notre langue, *ortho*gonal, stéréo*tomie*, ellipso*ïde*, etc. Il signifie littéralement surface coupant à angle droit: *ὀρθὸς*, droit; *τομὴ*, section; *εἶδος*, forme, apparence, surface.

Il me semble que pour perfectionner un peu la langue géométrique, imparfaite à tant d'égards, il faudrait consacrer exclusivement la terminaison en *ide* aux surfaces, et la terminaison en *ique* aux lignes courbes. Par là, le nom seul d'une grandeur graphique indiquerait si elle est une ligne ou une surface. Je ferais plus, je consacrerais le genre féminin aux surfaces, tandis que le genre masculin serait réservé aux longueurs et aux volumes.

Essayons d'appliquer cette nomenclature aux surfaces du second degré, et voyons l'avantage qu'elle peut avoir sur l'ancienne, pour la rapidité et la simplicité.

La ligne du second degré................................	*Le Deutérique.*
L'aire comprise par une ligne du second degré............	*La Deutérique.*
L'aire de la surface du second degré.....................	*La Deutéride.*
Le volume terminé par une surface du second degré.......	*Le Deutéride.*

Offrons un autre exemple, non plus utile seulement à une classe particulière de surfaces, mais à toutes les surfaces en général.

Une ligne des centres de courbure........................	*Le Centrocurvique.*
L'aire comprise sur la surface des centres de courbure par une ligne des centres de courbure............................	*La Centrocurvique.*
L'aire de la surface des centres de courbure..............	*La Centrocurvide.*
Le volume du corps terminé par la surface des centres de courbure..	*Le Centrocurvide.*

Nous laissons aux hommes dépouillés de préjugés, à juger des avantages et des inconvénients de l'innovation que nous proposons. Il est à desirer que la nécessité d'un tel changement soit sentie par tous ceux qui cultivent la vraie géométrie, et qu'ils aient le courage d'imiter les chimistes modernes, et de refaire aussi leur langue. Car il est étonnant que les dénominations d'une science où tout est harmonie et précision soient incohérentes et souvent si peu précises.

NOTE II.

THÉORÈME. L'angle de deux plans étant droit, un troisième plan qui les coupe chacun sous un angle droit, à un infiniment petit du *premier* ordre près, marque sur eux deux traces qui font entr'elles un angle droit, à un infiniment petit du *second* ordre près.

Soient (I), (II) les deux plans qui se coupent à angle droit en MN fig. 13, soient ωA, ωB les deux traces du troisième plan $A\omega B$, tel que $A\omega N$, $B\omega N$ ne diffèrent d'un angle droit que d'un infiniment petit du premier ordre. Pour remplir cette dernière condition, il faudra qu'en prenant ωO égal à un infiniment petit du premier ordre; les droites OA, OB, menées sur les plans (I), (II) perpendiculairement à leur intersection MN, rencontrent ωA, ωB à une distance finie de MN.

Or, les triangles rectangles AOB, $AO\omega$, $BO\omega$ donnent

$$AB^2 = OA^2 + OB^2,$$
$$\omega A^2 = \omega O^2 + OA^2,$$
$$\omega B^2 = \omega O^2 + OB^2.$$

De là on tire immédiatement

$$\omega A^2 + \omega B^2 = AB^2 + 2\omega O^2.$$

Maintenant prolongeons BA jusqu'en a, de manière qu'on ait

$$\omega A^2 + \omega B^2 = aB^2 = AB^2 + 2AB.Aa + Aa^2.$$

On aura de suite

$$2\omega O^2 = 2AB.Aa + Aa^2, \quad \text{ou} \quad 2\omega O^2 - Aa^2 = 2AB.Aa.$$

Mais $2\omega O^2$ et Aa^2 ne peuvent être plus grands que des infiniment petits du second ordre; AB est fini : donc Aa doit être un infiniment petit du second ordre. Or Aa est la base du triangle ωAa, où ωA est fini; donc l'angle $a\omega A$, différence de

l'angle B*A à l'angle droit, ne saurait surpasser un infiniment petit du second ordre : c'est précisément le principe que nous avions avancé.

NOTE III.

Conditions pour que deux plans tangents, et par conséquent deux surfaces, se coupent à angle droit en un point donné.

Puisque nous avons réduit la recherche des lignes de courbure à la simple intersection de surfaces trajectoires orthogonales, et que cette orthogonalité dépend de celle des plans tangents aux mêmes surfaces ; voyons comment nous déterminerons, par le moyen le plus facile, la condition nécessaire pour que deux plans se coupent à angle droit.

Si nous voulons rapporter la position d'un plan tangent quelconque à celle de trois plans coordonnés, nous pouvons le faire bien simplement, en prenant pour données les longueurs de chaque partie d'axe comprise entre l'origine et ce plan.

En regardant tour à tour chacun de ces axes comme la ligne des abscisses, nous appellerons ces parties les *soutangentes* du plan tangent ; c'est-à-dire, que nous étendrons aux trois dimensions la dénomination consacrée jusqu'ici aux étendues de deux dimensions.

Donc, dans un système de coordonnées quelconque, la position d'un plan tangent est complettement déterminée par la grandeur de ses trois *soutangentes*.

Si maintenant on compare l'un avec l'autre deux plans tangents à deux surfaces différentes, et qu'on établisse entre leur position une relation quelconque, cette même relation pourra donc toujours être produite par des valeurs convenables des soutangentes des deux plans. *Demandons-nous la loi qui fait dépendre les unes des autres les soutangentes de deux plans qui doivent être à angle droit.*

Deux plans se coupent à angle droit, lorsque deux perpendiculaires à ces plans, parties d'un même point, se coupent elles-mêmes à angle droit.

Rapportons nos deux plans tangents à des coordonnées rectangulaires, et soient a, b, c ; a', b', c' leurs soutangentes respectives ; abaissons de l'origine deux perpendiculaires sur ces plans : enfin soient A, B, C ; A', B', C' les trois coordonnées du point où ces perpendiculaires rencontrent les plans tangents qui leur correspondent.

Puisque ces deux lignes se rencontrent à angle droit à l'origine, le quarré de l'hypothénuse qui joint leurs extrémités est égal à la somme de leurs quarrés.

IVme MÉMOIRE.

Or, la diagonale d'un parallélepipède ayant pour quarré la somme des quarrés des arêtes d'un même angle de ce solide, on en conclut que le quarré d'une droite donnée est égal à la somme des quarrés de ses projections sur trois axes rectangulaires quelconques; mais les projections des droites que nous considérons sont évidemment

$$\begin{array}{ccc} A, & B, & C, \\ A', & B', & C', \\ A+A', & B+B', & C+C'. \end{array}$$

Donc on a

$$A^2+B^2+C^2+A'^2+B'^2+C'^2=(A+A')^2+(B+B')^2+(C+C')^2.$$

Dans cette égalité, tous les quarrés du premier membre sont détruits par les quarrés du second, ce qui donne

$$0=AA'+BB'+CC'.$$

Telle est donc la condition qui doit lier entr'elles les coordonnées A, B, C; A', B', C', pour que les deux plans qui leur correspondent se coupent à angle droit.

Maintenant la perpendiculaire projetée sur le plan des A, B et des a, b sera aussi perpendiculaire à la trace du plan tangent sur le même plan. Donc les coordonnées A, B et les soutangentes a, b seront les petits côtés de deux triangles dont les trois côtés sont respectivement à angle droit, ce qui donne immédiatement

$$A : B :: b : a :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

On aura de même, en comparant A, B, C, pour le premier plan,

$$A : B : C :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

et pour le second,

$$A' : B' : C' :: \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}.$$

Or, $AA'+BB'+CC'=0$; donc $\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}=0.$

D'où résulte ce théorême général : *Pour que deux plans tangents soient à angle droit, il faut que la somme des valeurs inverses de leurs soutangentes correspondantes soit nulle.*

Avant de terminer cette note, nous croyons devoir présenter le moyen de donner l'angle de deux plans par les valeurs de leurs soutangentes.

Pour cela, rappelons-nous toujours que l'angle de deux plans se mesure par celui de deux droites qui, parties d'un même point, leur sont perpendiculaires. Prenons l'origine pour ce point, et supposons, de plus, que les deux plans sont équidistants de l'origine : ce qu'on peut faire sans rien changer à leur direction, ni par conséquent à l'angle qu'ils forment entr'eux.

Les perpendiculaires OM, OM', fig. 14, menées de l'origine aux deux plans donnés, étant égales par hypothèse, cherchons quel est l'angle qu'elles forment entr'elles lorsque leurs trois projections sur les axes des x, y, z sont connues et représentées, suivant notre usage, par OM_x, OM_y, OM_z; OM'_x, OM'_y, OM'_z.

Pour cela, je prends sur le prolongement de OM, $Om = OM$. Alors M, M', m sont trois points d'un cercle ayant O pour centre; donc $MM'm$ est rectangle en M'.

En abaissant sur OM la perpendiculaire $M'p$, on a par conséquent

$$mp = \frac{mM'^2}{mM}, \quad \text{et} \quad Op = \frac{mM'^2}{2OM} - OM = \frac{MM'^2 - 2OM^2}{2OM}.$$

Or, $$MM'^2 = (OM_x + OM'_x)^2 + (OM_y + OM'_y)^2 + (OM_z + OM'_z)^2,$$

$$-2OM^2 = -OM^2_x - OM'^2_x - OM^2_y - OM'^2_y - OM^2_z - OM'^2_z.$$

Donc, $$Op = \frac{OM_xOM'_x + OM_yOM'_y + OM_zOM'_z}{OM}.$$

Donc, le rapport $\frac{Op}{OM'}$, par lequel on représente souvent l'angle de deux lignes (c'est ce qu'on appelle le *cosinus* de cet angle); ce rapport, dis-je, est

$$\frac{Op}{OM'} = \frac{OM_xOM'_x + OM_yOM'_y + OM_zOM'_z}{OM.OM'}.$$

Trouvons maintenant les valeurs de ces lignes par le moyen des soutangentes a, b, c; a', b', c'.

Soient prises les longueurs α, β, γ, α', β', γ', telles que

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'} :: OM_x : OM_y : OM_z : OM'_x : OM'_y : OM'_z :: \alpha : \beta : \gamma : \alpha' : \beta' : \gamma'.$$

J'en conclus de suite

$$\begin{array}{ccccccccc} OM_xOM'_x & : & OM_yOM'_y & : & OM_zOM'_z & : & OM^2 & : & OM'^2 \\ :: \ \alpha\alpha' & : & \beta\beta' & : & \gamma\gamma' & : & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & : & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2; \end{array}$$

donc

$$\frac{(OM_xOM'_x + OM_yOM'_y + OM_zOM'_z)}{OM^2OM'^2} = \frac{(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)},$$

 c'est-à-dire, qu'en prenant les valeurs inverses des soutangentes de deux plans donnés, la somme des produits deux à deux des valeurs inverses correspondantes, divisée par le produit des deux droites ayant respectivement ces valeurs inverses pour projections; ce quotient, dis-je, est précisément ce qu'on appelle le *cosinus* de l'angle formé par les deux plans.

NOTE IV.

Détermination des ombilics des surfaces du second degré.

Quand une hyperbole et une ellipse ont mêmes foyers, les rayons vecteurs de chaque point où elles se coupent sont égaux à la distance d'un même sommet de l'une aux deux sommets de l'autre.

En effet, soit D la distance d'un foyer commun au centre commun. 2A, 2A′ étant les axes placés sur la ligne des foyers, et R, R′ les rayons vecteurs, nous aurons $R + R' = 2A$ pour l'ellipse, $R - R' = 2A'$ pour l'hyperbole; donc $R = A + A'$, $R' = A - A'$: or, ce sont les distances dont nous venons de parler. Mais les ombilics de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde elliptique sont respectivement sur le plan de l'hyperbole et de l'ellipse limites ayant alternativement pour foyer et pour sommet les foyers des deux grandes sections principales.

Donc, pour avoir les ombilics de l'ellipsoïde, « il faut simplement, dans la moyenne section principale, prendre pour rayon vecteur la distance du sommet du grand axe au foyer de la grande section. »

On fera la même chose pour l'hyperboloïde.

Enfin, quand deux paraboles ont même foyer et même axe (mais sont dirigées en sens contraire), la distance de leurs sommets est le rayon vecteur du point où elles se coupent.

Donc, « pour avoir les ombilics du paraboloïde elliptique, après avoir déterminé la distance du sommet aux foyers des deux sections principales, on prendra la plus grande distance pour rayon vecteur de la section principale appartenant à l'autre foyer ». Ces déterminations paraissent être aussi simples qu'il est possible de le desirer.

FIN DES NOTES DU QUATRIÈME MÉMOIRE.

CINQUIÈME MÉMOIRE.

THÉORIE
DES
SURFACES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES,
APPLIQUÉE
A LA DÉTERMINATION DES LIGNES DE COURBURE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Ce Mémoire terminera ce que nous avons à dire sur la théorie de la courbure des surfaces. Nous aurions voulu pouvoir y joindre nos recherches sur les contacts du troisième et du quatrième ordre. Mais, encore une fois appelés à l'extrémité de l'Empire, tout doit céder aux devoirs de notre état, et nous nous voyons forcés de remettre à un autre temps la publication de la suite de nos travaux.

Avant de montrer d'une manière générale, les propriétés dont jouissent les surfaces trajectoires orthogonales quelconques, et qui

 les rendent propres à la recherche des lignes de courbure, nous chercherons à faire voir l'utilité dont peuvent être ces mêmes propriétés, par un exemple pris sur un ordre de surfaces très-étendu et pourtant simple encore. Par là nous rendrons plus sensibles et plus faciles, les généralités auxquelles nous tâcherons de parvenir.

PARAGRAPHE PREMIER.

DES SURFACES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DU SECOND DEGRÉ.

ARTICLE PREMIER.

Déterminer les conditions qui rendent deux surfaces du second degré, trajectoires orthogonales réciproques.

L'équation générale des surfaces du second degré, rapportées à leur centre et à leurs plans principaux est, comme on sait,

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Mais au lieu de nous servir de cette équation, nous ferons

$$qr = a^2, \quad pr = b^2, \quad pq = c^2,$$

et nous obtiendrons, sous une forme plus simple, cette équation identique à la précédente

$$(S)\ldots \quad pqr.px^2 + pqr.qy^2 + pqr.rz^2 = pqr.pqr,$$

ou simplement,

$$(S)\ldots \quad px^2 + qy^2 + rz^2 = pqr.$$

L'équation du plan tangent à la surface (S) sera

$$(T)\ldots \quad pxX + qyY + rzZ = pqr.$$

Représentons pareillement par

$$(\Sigma)\ldots\quad \pi x^2 + \varphi y^2 + \psi z^2 = \pi\varphi\psi,$$
$$(\Theta)\ldots\quad \pi x X + \varphi y Y + \psi z Z = \pi\varphi\psi;$$

1° une seconde surface (Σ), aussi du second degré, concentrique à la première, et comme elle ayant les plans coordonnés mêmes pour plans principaux; 2° un plan (Θ) tangent à cette surface.

En nommant α, $\mathcal{C}$, γ les trois axes de (Σ), nous aurons pareillement

$$\varphi\psi = \alpha^2, \quad \pi\psi = \mathcal{C}^2, \quad \pi\varphi = \gamma^2.$$

Exprimons maintenant que les surfaces (S) et (Σ) se coupent à angle droit dans toute l'étendue de leur intersection. Il suffira pour cela d'exprimer que leurs plans tangents (T) et (Θ), en un même point x, y, z, se coupent à angle droit. Or, on sait qu'il faut pour remplir une telle condition, que la somme des produits, deux à deux, des coefficients correspondants de x, y, z soit égale à zéro: on aura donc cette équation de condition

$$p\pi x^2 + q\varphi y^2 + r\psi z^2 = 0.$$

Exprimons ensuite que cette équation doit avoir lieu pour tous les points x, y, z communs aux deux surfaces (S) et (Σ). Il faudra pour cela faire coexister cette équation avec les équations (S) et (Σ). Mais, combinée avec chacune de celles-ci, elle détermine entièrement les projections d'une ligne courbe. Donc en déterminant ces projections successivement pour (S) et pour (Σ), il suffira ensuite d'exprimer que ces projections ont les mêmes équations: ce que nous ferons immédiatement en égalant les rapports des coefficients correspondants dans les deux équations de condition.

Éliminant donc tour à tour x, y, z, de cette équation de condition et de la primitive (S), puis de la même équation et de (Σ),

Vme MÉMOIRE. nous aurons

$$(1) \ldots \begin{cases} p(\psi-\pi)x^2+q(\psi-\varphi)y^2=pqr.\psi, \\ q(\pi-\varphi)y^2+r(\pi-\psi)z^2=pqr.\pi, \\ r(\varphi-\psi)z^2+p(\varphi-\pi)x^2=pqr.\varphi, \end{cases}$$

$$(2) \ldots \begin{cases} \pi(r-p)x^2+\varphi(r-q)y^2=\pi\varphi\psi.r, \\ \varphi(p-q)y^2+\psi(p-r)z^2=\pi\varphi\psi.p, \\ \psi(q-r)z^2+\pi(q-p)x^2=\pi\varphi\psi.q. \end{cases}$$

D'où nous tirerons, par la comparaison des coefficients que nous venons de préparer,

$$p(r-q)=\pi(\psi-\varphi),$$
$$q(p-r)=\varphi(\pi-\psi),$$
$$r(q-p)=\psi(\varphi-p);$$

or,

$$\left.\begin{matrix} pq=c^2, & \pi\varphi=\gamma^2 \\ pr=b^2, & \pi\psi=6^2 \\ qr=a^2, & \varphi\psi=\alpha^2 \end{matrix}\right\} \text{ donc } \begin{cases} a^2-b^2=\alpha^2-6^2, \\ b^2-c^2=6^2-\gamma^2, \\ c^2-a^2=\gamma^2-\alpha^2. \end{cases}$$

Il est facile de voir que les grandeurs a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2; α^2-6^2, $6^2-\gamma^2$, $\gamma^2-\alpha^2$ ne sont autre chose que les quarrés des excentricités des sections principales des surfaces (S) et (Σ). D'où résulte ce théorême général. Si deux surfaces du second degré, concentriques, ont respectivement les mêmes foyers pour leurs trois sections principales, quelles que soient d'ailleurs ces surfaces, elles se couperont à angle droit dans tous les points de leur commune intersection.

On peut également exprimer ce théorême indépendamment d'aucune notion de foyers, ni d'excentricité. Il suffit de dire que les deux surfaces doivent avoir leurs sections principales respectivement placées dans les mêmes plans, et les quarrés de leurs axes correspondants équidifférents. Ce nouvel énoncé n'est que la tra-

duction des trois équations de condition,

$$p(r-q)=\pi(\psi-\varphi).$$
$$q(p-r)=\varphi(\pi-\psi),$$
$$r(q-p)=\psi(\varphi-\pi).$$

Remarquons en passant que les équations (1) étant du second degré, seulement en x, y, z, elles indiquent que les projections de la courbe commune à (S) et à (Σ), sont des lignes du second degré, ayant leurs axes appliqués sur les axes mêmes de la surface.

Autrement et plus simplement. On peut parvenir aux résultats exposés dans cet article, par une voie beaucoup plus expéditive; il suffit pour cela d'employer des considérations analogues à celles qui nous ont guidé dans la démonstration géométrique donnée IVe Mémoire, pag. 267.

Pour cela, j'observe que l'équation générale des deux surfaces du second degré,

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

et

$$\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

en les divisant respectivement par $a^2b^2c^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, peuvent être mises sous cette forme,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}=1,$$

et

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Si nous retranchons cette dernière équation de celle qui la précède, nous obtiendrons

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)z^2=0;$$

et cette équation ayant lieu en même temps que celles dont elle

Vme MÉMOIRE. est dérivée, la surface qu'elle représente passe par l'intersection même des deux surfaces primitives du second degré : c'est l'équation du cône ayant l'origine pour centre, et passant par l'intersection des deux surfaces primitives.

Si maintenant on veut que les deux surfaces primitives se coupent partout à angle droit, comme les équations de leurs plans tangents sont

$$\frac{x}{a^2}.X+\frac{y}{b^2}.Y+\frac{z}{c^2}.Z=1$$

et

$$\frac{x}{\alpha^2}.X+\frac{y}{\beta^2}.Y+\frac{z}{\gamma^2}.Z=1,$$

il faudra qu'on ait toujours cette équation de condition

$$\frac{x}{a^2}.\frac{x}{\alpha^2}+\frac{y}{b^2}.\frac{y}{\beta^2}+\frac{z}{c^2}.\frac{z}{\gamma^2}=0.$$

Donc pour que cette équation puisse appartenir à toute intersection des deux surfaces primitives, il faut que cette équation ait nécessairement lieu en même temps que

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)z^2=0.$$

Donc il faut que les rapports de leurs coefficients correspondants soient égaux, ce qui donne

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)a^2\alpha^2=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)b^2\beta^2=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)c^2\gamma^2,$$

ou

$$\alpha^2-a^2=\beta^2-b^2=\gamma^2-c^2,$$

résultat qui montre évidemment que *pour se couper à angle droit, il faut que deux surfaces du second degré ayant mêmes plans principaux, aient les quarrés de leurs axes correspondants* équidifférents.

On ferait voir avec facilité, mais un peu plus longuement, que deux surfaces du second degré ne sauraient se couper partout à

angle droit, si elles n'ont pas mêmes plans principaux, et par conséquent, si elles n'ont pas aussi les quarrés de leurs axes correspondants équidifférents. D'ailleurs ce principe ne nous est pas nécessaire.

ARTICLE II.

L'intersection de deux surfaces du second degré, trajectoires réciproques orthogonales, est précisément pour l'une et pour l'autre, une des lignes de leur courbure.

Pour démontrer cette proposition, rappelons nous d'abord que les lignes de courbure des surfaces sont caractérisées par la propriété qu'ont les normales à la surface suivant une de ces courbes, de former une surface développable. D'où il suit immédiatement que si un plan tangent à la surface fait marcher son point de contact suivant la direction d'une ligne de courbure, la surface développable formée par les intersections successives de ce plan, jouira de la propriété suivante : « toutes les arêtes rectilignes seront des droites tangentes à la surface, et normales à la ligne de courbure. » C'est ce qu'on sait déjà.

Cela posé, cherchons l'équation de ces arêtes rectilignes. Si l'on différentie les équations (1) par rapport à x, y, z, elles donneront la position d'une droite tangente à l'intersection des surfaces (S), (Σ); or ces équations offrent les deux équations différentielles

$$d(1)\ldots\ldots \begin{cases} p(\varphi-\pi)\,x\,\frac{dx}{dz}+r(\varphi-\psi)\,z=0, \\ q(\pi-\varphi)\,y\,\frac{dy}{dz}+r(\pi-\psi)\,z=0. \end{cases}$$

Elles expriment qu'en passant d'un point de (S) ou (Σ) à un autre point infiniment voisin, on marche toujours sur la commune intersection de ces surfaces. Faisons suivre ce mouvement au plan tangent (T). Si dans l'équation (T) je différentie par rapport à

 x, y, z, sans supposer que les coordonnées courantes X, Y, Z varient, l'équation différentielle que j'obtiendrai appartiendra à la fois au plan tangent à (S) en x, y, z, et au plan tangent à cette même surface en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$: donc cette équation différentielle appartiendra à l'arête intersection de ces deux plans consécutifs ; et, en supposant que x, y, z prennent successivement toutes les valeurs qui conviennent à l'intersection (1), l'équation différentielle que nous allons obtenir appartiendra également à toutes les arêtes de la surface développable, tangente à (S) dans toute l'étendue de l'intersection (1).

Or cette équation est

$$d\,(\mathrm{T})\ldots\quad p\mathrm{X}\frac{dx}{dz}+q\mathrm{Y}\frac{dy}{dz}+r\mathrm{Z}=0.$$

En chassant $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ de cette équation au moyen des deux équations $d\,(1)$, on a

$$(\varphi-\psi)\,\mathrm{X}.y.z+(\psi-\pi)\,x.\mathrm{Y}.z+(\pi-\varphi)\,x.y.\mathrm{Z}=0.$$

On voit que cette équation est simplement du premier ordre en X, Y, Z, ce qui lui permet de couper le plan (T) suivant les arêtes rectilignes d'une surface développable, etc.

J'observe maintenant que le plan exprimé par cette équation, est perpendiculaire au plan (Θ), tangent en x, y, z à la seconde surface (Σ). Si nous prenons en effet la somme des produits des coefficients correspondants, par rapport à X, Y, Z dans les équations de ces deux plans, nous aurons

$$x.y.z\,[\pi(\varphi-\psi)+\varphi(\psi-\pi)+\psi(\pi-\varphi)],$$

grandeur évidemment nulle.

Donc les arêtes de la surface développable que nous considérons, sont à la fois sur ce nouveau plan, normal au plan (Θ), et sur le plan (T), qui lui-même est normal au plan (Θ), par hypo-

thèse. Il suit de là que chacune de ces arêtes est normale au plan (Θ) et à l'intersection des plans tangents (T) et (Θ) qui lui correspondent : elle est donc aussi normale à la courbe (1), intersection des surfaces primitives (S) et (Σ) : donc, enfin, *la courbe* (1) *intersection des surfaces* (S) *et* (Σ), *est pour l'une et pour l'autre une ligne de courbure.* Vme MÉMOIRE.

Ainsi « quand deux surfaces du second degré ont les mêmes foyers pour leurs sections principales correspondantes, non-seulement elles se coupent partout à angle droit, mais leur intersection est à la fois une ligne de courbure pour chacune d'elles (*). »

ARTICLE III.

Identité des équations nouvelles des lignes de courbure des surfaces du second degré, avec celles trouvées par Monge.

Dans cet article, nous allons faire voir que les équations des lignes de courbure auxquelles nous sommes parvenus dans l'article

(*) Un mathématicien distingué déjà par de vrais titres, et qui fixera sa place dans un rang plus honorable encore, Binet jeune, est parvenu de son côté à ce même résultat. Il l'a trouvé comme un corollaire des théorêmes qu'il a fait connaître sur les moments d'inertie et les axes des corps. Le Mémoire où sont consignées ses recherches, a été présenté en 1811 à la première classe de l'Institut de France, et la marche seule que l'auteur a suivie suffirait, sans son assertion, pour montrer qu'il est parvenu, par une route qui lui est propre, à des résultats qu'il croyait nouveaux.

En 1805, j'ai trouvé les théorêmes qui font la base de mon Mémoire. Je les ai communiqués à plusieurs géomètres célèbres en France et en Italie; en 1809, habitant les îles Ioniennes menacées par l'ennemi, incertain sur l'avenir, j'envoyai ce même Mémoire à l'Institut Royal de Naples, ainsi que je l'ai dit au commencement de cette Section. Dans sa séance du 28 mars 1813, l'Institut de France a reconnu l'antériorité de mes recherches et de leur publication, tout en consacrant la légitimité des travaux du savant auquel je suis le premier à rendre justice.

Vme MÉMOIRE. précédent, sont identiques avec celles que Monge a données pour les projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde, équations qu'il obtient en intégrant l'équation des lignes de courbure après l'avoir différentiée d'abord pour obtenir une équation linéaire. (Voyez feuille XXIII des Leçons d'Analyse appliquée, données à l'École Polytechnique.

Reprenons donc la première des équations (1) qui sont celles des projections des lignes de courbure des surfaces du second degré, faites sur leurs trois plans principaux:

$$p(\psi-\pi)x^2+q(\psi-\varphi)y^2=pqr.\psi,$$

ou

$$\frac{\psi-\pi}{qr}x^2+\frac{\psi-\varphi}{pr}y^2=\psi.$$

Or $qr=a^2$ et $pr=b^2$.

On a donc d'abord

$$\frac{\psi-\pi}{a^2}x^2+\frac{\psi-\varphi}{b^2}y^2=\psi.$$

En y substituant pour π, φ, ψ, leurs valeurs données art. I, savoir,

$$\pi=\frac{6\gamma}{\alpha},\quad \varphi=\frac{\alpha\gamma}{6},\quad \psi=\frac{\alpha6}{\gamma},$$

et en nous rappelant que les demi-axes α, 6, γ de la nouvelle surface du second degré, sont liés aux demi-axes a, b, c de la première, par les équations de condition

$$a^2-b^2=\alpha^2-\gamma^2,\quad b^2-c^2=6^2-\gamma^2,\quad c^2-a^2=\gamma^2-\alpha^2,$$

nous aurons d'abord

$$\psi-\varphi=\frac{\alpha6}{\gamma}-\frac{\alpha\gamma}{6}=\alpha^2.\frac{6^2-\gamma^2}{\alpha6\gamma},$$

$$\psi-\pi=\frac{\alpha6}{\gamma}-\frac{6\gamma}{\alpha}=6^2.\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha6\gamma},$$

$$\pi-\varphi=\frac{6\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha\gamma}{6}=\gamma^2.\frac{6^2-\alpha^2}{\alpha6\gamma};$$

ce qui donne immédiatement

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{a^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha\beta\gamma}x^2+\frac{\beta^2-\gamma^2}{b^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2}.$$

Multipliant par $\alpha\beta\gamma$ l'un et l'autre membre de cette équation, nous aurons

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{a^2}.\beta^2.x^2+\frac{\beta^2-\gamma^2}{b^2}.\alpha^2.y^2=\alpha^2\beta^2.$$

Lorsqu'on fera dans cette équation x ou y égal à zéro, les valeurs Y et X correspondantes seront celles des axes des x et des y de la courbe exprimée par cette équation.

Or il est évident qu'en divisant par β^2, après avoir fait

$$y=0,\quad \text{on a}\quad \frac{\alpha^2-\gamma^2}{a^2}.X^2=\alpha^2,$$

et ensuite en divisant la même équation par α^2, après avoir fait

$$x=0,\quad \text{on a}\quad \frac{\beta^2-\gamma^2}{b^2}.Y^2=\beta^2.$$

On aura donc entre les deux axes X, Y, cette relation

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{a^2}.X^2-\frac{\beta^2-\gamma^2}{b^2}.Y^2=\alpha^2-\beta^2;$$

et par conséquent, en vertu des équations de condition,

$$(a)\ldots\quad \frac{a^2-c^2}{a^2}.X^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}.Y^2=a^2-b^2.$$

Monge, après avoir donné l'équation

$$n^2x^2\pm m^2y^2=m^2n^2$$

pour la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des x, y, fait voir que les axes m, n sont liés entr'eux par l'équation de condition

$$m^2\mp An^2=B^2,$$

les grandeurs A, B étant

$$A=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad \text{et}\quad B=a^2.\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}.$$

On voit donc que les X et Y de l'équation (a) sont précisement les m et n de cette équation de condition, lorsqu'on y met pour

 A et B leur valeur. Notre équation des lignes de courbure est donc identique avec l'équation déjà connue.

Il est facile de voir pourquoi l'équation

$$m^2 \mp An^2 = B,$$

présente un double signe $\mp$, tandis que la nôtre ne l'offre pas ; α^2, β^2 étant arbitraires, s'ils sont tous deux positifs, on aura d'abord le signe moins pour le terme contenant Y ; mais si β^2 est négatif, ce qu'on peut toujours supposer, puisque c'est une constante arbitraire, le terme qui contient Y devient positif; et de la sorte, on voit que les surfaces du second degré nous présentent dans ce cas deux séries de projections pour leurs lignes de courbure, l'une composée de courbes elliptiques, l'autre de courbes hyperboliques : c'est ce que nous examinerons tout à l'heure avec plus de détail.

Pour ne pas nous arrêter trop long-temps sur le cas particulier des surfaces du second degré, avant de passer au cas général des surfaces trajectoires orthogonales quelconques, nous croyons devoir renvoyer à la note I, l'examen et la démonstration de quelques propriétés remarquables dont jouissent les projections des lignes de courbure en particulier, et celles des surfaces quelconques, considérées dans toute l'étendue de ces surfaces.

ARTICLE V.

Système général des surfaces trajectoires orthogonales réciproques du second degré.

Mettons l'équation générale (Σ) sous la forme

$$(\Sigma) \ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et regardons les trois quantités a, b, c comme des constantes arbitraires. D'après ce que nous avons démontré dans notre pre-

mier paragraphe, si a, b, c prennent successivement les valeurs
α, β, γ, telles que

$$a^2 - b^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \quad b^2 - c^2 = \beta^2 - \gamma^2, \quad c^2 - a^2 = \gamma^2 - \alpha^2,$$

toutes les surfaces du second degré qu'on obtiendra de la sorte, ou ne couperont pas du tout la surface (Σ), ou la couperont partout à angle droit. Il faut voir quelle forme générale ce système de surfaces doit prendre dans l'espace. Mais afin de n'avoir plus à nous occuper des conditions qui lient a, b, c entr'elles, faisons $a^2 - c^2 = m^2$, $b^2 - c^2 = n^2$; par là l'équation (Σ) deviendra

$$(\Sigma_1) \ldots \quad \frac{x^2}{m^2 + c^2} + \frac{y^2}{n^2 + c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

équation dans laquelle m, n sont des constantes définies, invariables, tandis que c est entièrement arbitraire : enfin, supposons $a > b > c$, d'où $m > n$.

Si nous faisons c^2 infini, il faudra que $m^2 + c^2$, $n^2 + c^2$ le soient pareillement, et par conséquent aussi a et b : c'est l'ellipsoïde limite de l'espace.

Si nous supposons ensuite que c^2 diminue successivement, tant qu'il ne sera pas négatif, l'équation (Σ_1) sera celle de l'ellipsoïde, qui diminuera aussi en tout sens. Lorsque c^2 deviendra nul, l'ellipsoïde réunira ses faces supérieure et inférieure pour se réduire sur le plan des x, y, à la portion de ce plan, comprise par l'ellipse

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

et le système des ellipsoïdes aura par conséquent rempli de ses points tout l'espace. Remarquons en passant la courbe

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

limite des ellipsoïdes; ses axes

$$2m = 2\sqrt{(a^2 - c^2)} \quad \text{et} \quad 2n = 2\sqrt{(b^2 - c^2)}$$

 sont les excentricités mêmes, communes à tous les ellipsoïdes, ce qui veut dire que cette courbe a ses quatre sommets aux deux foyers communs des grandes sections principales, et aux deux foyers communs des petites sections principales de toutes les surfaces du second degré du système.

Si c^2 après être devenu nul devient négatif, l'équation (Σ) deviendra

$$(\Sigma_2)\ldots\quad \frac{x^2}{m^2-c^2}+\frac{y^2}{n^2-c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Cela posé, si c^2, après être passé du positif au négatif en s'évanouissant, croît ensuite de plus en plus négativement, la surface (Σ_2) d'abord réduite à l'aire plane environnant l'ellipse limite des ellipsoïdes, formera un hyperboloïde hyperbolique ou à une nappe (la gorge d'une poulie nous offre une forme analogue à celle de cet hyperboloïde). Lorsque c^2 sera très-petit, la gorge de cet hyperboloïde sera très-rapprochée de l'ellipse limite, et très-*étranglée*; au contraire, elle se dilatera de plus en plus, à mesure que c^2 croîtra, de manière que quand c^2 sera égal à $n^2=b^2-c^2$, l'hyperboloïde à une nappe sera entièrement aplati sur le plan du petit et du grand axe, et l'équation (Σ_2) deviendra celle de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2}=1,$$

hyperbole dont les sommets sont aux foyers des moyennes sections principales du système, puisque la moyenne excentricité commune est de

$$a^2-b^2=m^2-n^2,$$

valeur de l'axe réel de cette hyperbole.

Si c^2 croît toujours négativement, l'hyperboloïde deviendra elliptique ou à deux nappes : on peut s'en former une idée, par exemple, en faisant tourner une hyperbole sur son axe réel, elle engendrera ce que nous appelons un *hyperboloïde elliptique*.

Dans ce dernier cas, l'équation (Σ) deviendra

$$(\Sigma_3)\ldots\quad \frac{x^2}{m^2-c^2}-\frac{y^2}{c^2-n^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Cet hyperboloïde est aplati sur le plan du petit et du grand axe; c'est la partie intérieure des branches de l'hyperbole limite qui appartient aux premiers hyperboloïdes ou à une nappe; l'autre partie de ce plan appartient aux hyperboloïdes à deux nappes. Remarquons encore que les axes de la courbe

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2}=1,$$

à cause que

$$m^2-n^2=a^2-b^2,\qquad n^2=b^2-c^2,$$

sont aussi les excentricités des sections principales sur le plan des x, z.

Enfin, si c^2 surpasse de plus en plus n^2, l'hyperboloïde elliptique ouvrira peu à peu chacune de ses nappes en même temps qu'il les rapprochera l'une de l'autre pour aller les aplatir et les confondre enfin toutes deux sur le plan des y, z, ou des petites sections principales. Dans ce cas, la surface du plan, tout entière, sera l'hyperboloïde à deux nappes, et la dernière limite de nos surfaces; car si c^2 croissait négativement au-delà de m^2, l'équation (Σ) devenant

$$-\frac{x^2}{c^2-m^2}-\frac{y^2}{c^2-n^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ou

$$\frac{x^2}{c^2-m^2}+\frac{y^2}{c^2-n^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

ce serait la somme de quatre grandeurs positives, et jamais elle ne pourrait être nulle.

Si nous considérons maintenant les intersections des surfaces de ces divers systèmes, nous verrons que les hyperboloïdes à une nappe tracent sur les ellipsoïdes toutes les lignes d'une des courbures de ces ellipsoïdes, tandis que les ellipsoïdes à deux nappes

tracent sur ces mêmes ellipsoïdes toutes les lignes de leur seconde courbure.

Nous verrons que les hyperboloïdes à une nappe, en traversant les surfaces ellipsoïdes, y tracent des courbes qui tournent toutes autour de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}=1+\frac{z^2}{n^2},$$

limite de ces hyperboloïdes; et qu'à mesure que les hyperboloïdes à une nappe s'aplatissent, à mesure aussi les courbes d'intersection s'approchent de l'hyperbole des limites, sans pouvoir jamais la toucher que quand l'hyperboloïde s'évanouit et devient cette hyperbole même.

Ainsi l'hyperbole limite des (Σ_2) et des (Σ_3), partant des foyers des grandes sections principales, s'élève perpendiculairement au plan de ces sections, en traversant à angle droit tous les ellipsoïdes, et en marquant sur chacun d'eux quatre points autour desquels tournent et dont s'approchent de plus en plus les lignes d'une des courbures de ces ellipsoïdes.

Si nous considérons l'hyperboloïde à deux nappes, nous verrons qu'au lieu d'être embrassé par l'hyperbole *des limites*, comme l'autre hyperboloíde, il l'embrasse constamment, et s'en approche de plus en plus à mesure qu'il s'aplatit, pour se confondre avec l'aire même de cette hyperbole, lorsqu'il s'aplatit enfin tout à fait sur le plan des moyennes sections.

Donc les secondes intersections des ellipsoïdes et des hyperboloïdes elliptiques, tournent comme les premières autour de l'hyperbole limite : donc enfin, cette hyperbole marque sur chaque ellipsoïde, quatre de ces points singuliers qu'on a nommés *ombilics*, autour desquels les lignes d'une des courbures croisent celles de l'autre courbure, de manière à l'enclaver entièrement dans leurs branches, à le resserrer de plus en plus, mais sans pouvoir passer

par lui qu'en réunissant à la fois en une seule, deux lignes de différente courbure, et les deux branches de chacune de ces lignes. (Cette courbe est ici la grande section principale.)

Il est bon de remarquer en passant, cette singularité très-piquante; les quatre ombilics séparent quatre parties sur la moyenne section principale de l'ellipsoïde; deux de ces parties opposées forment une ligne unique de plus grande courbure, et les deux autres parties opposées, une ligne de moindre courbure. Les deux premières appartiennent aux hyperboloïdes à une nappe, les deux autres appartiennent aux hyperboloïdes à deux nappes, et le point ombilic est celui où les deux courbures deviennent égales: enfin, dans ce point, les deux lignes de courbure qui devraient se couper à angle droit, ne sont que le prolongement l'une de l'autre.

J'ai voulu développer ici, pour les ellipsoïdes, la manière dont notre système général de surfaces décompose les formes des surfaces individuelles qui le constituent; et montrer, si je puis parler ainsi, avec quelle perfection il dessine et caractérise la forme des lignes de courbure et des éléments qui leur correspondent.

J'aurais pu faire voir avec une égale facilité, que les hyperboloïdes à deux nappes ont pour ombilics les points où l'ellipse limite $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ les traverse; au moyen de ces points, j'aurais décomposé la grande section principale de ces hyperboloïdes en six parties, dont les deux intermédiaires auraient appartenu à la plus grande, et les quatre autres à la moindre courbure, etc.....; et par là, j'aurais montré que l'hyperboloïde à deux nappes ou *elliptique* est, comme l'*ellipsoïde*, doué de quatre ombilics, tandis que l'hyperboloïde à une nappe ou *hyperbolique*, n'en saurait avoir aucun.

Ces propriétés des ellipses et des hyperboles limites fournissent, comme on voit, un moyen très-simple de déterminer immédiate-

 ment les ombilics d'une surface du second degré, rapportée à ses plans principaux. (Voyez la note IV du Mémoire précédent.)

ARTICLE V.

Du système des surfaces paraboloïdes trajectoires orthogonales.

Jusqu'ici nous avons supposé que les diverses surfaces du second degré dont nous nous sommes occupés, avaient leur centre rapporté à l'origine des coordonnées; cependant il est un genre de surfaces du second degré qui ne peut se prêter à cette hypothèse; c'est celui des paraboloïdes. On sait en effet que le centre des paraboloïdes se trouve toujours à une distance infinie du point le plus près de la surface à laquelle il appartient.

Comme on n'a point encore fait connaître la forme et la nature des lignes de courbure des paraboloïdes, nous allons les déterminer en employant pour cela notre méthode des surfaces trajectoires orthogonales. Nous completterons ainsi tout ce qu'il est possible de dire sur la génération des lignes de courbure des surfaces du second degré. Enfin, par ce nouvel exemple, nous nous familiariserons encore plus avec ces systêmes généraux de trois groupes de surfaces, tels que les surfaces de chaque groupe sont coupées à angle droit par toutes les surfaces des deux autres groupes, et coupées suivant leurs lignes de courbure.

Avant d'aller plus loin, observons que les paraboloïdes du second degré présentent, ainsi que les hyperboloïdes, deux variétés bien distinctes : quoiqu'ils ne puissent jamais avoir qu'une seule nappe, ils peuvent être, comme les hyperboloïdes, elliptiques ou hyperboliques, suivant que leurs deux courbures sont dirigées dans le même sens ou en sens opposés.

Dans le paraboloïde elliptique, toutes les paraboles qu'il est possible de tracer sur la surface, ont leurs branches tournées d'un même

côté de l'axe, et l'équation de la surface est de la forme

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x}{a}=1.$$

Alors les distances de l'origine aux foyers des deux sections principales, sont respectivement $\frac{a^2-c^2}{2a}$, $\frac{a^2-b^2}{2a}$, tandis que la distance du sommet de la surface aux foyers de ces sections, est $-\frac{c^2}{2a}$, $-\frac{b^2}{2a}$.

La seconde espèce est celle où le paraboloïde étant hyperbolique, a ses deux sections principales dirigées en sens contraires et opposées au sommet. Par conséquent son équation prend la forme

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{2x}{a}=1+\frac{y^2}{b^2};$$

et les distances de l'origine aux foyers sont respectivement $\frac{a^2-c^2}{2a}$, $\frac{a^2+b^2}{2a}$: il est visible qu'ici les distances du sommet de la surface aux foyers sont respectivement $\frac{-c^2}{2a}$, $\frac{+b^2}{2a}$; ce qui nous montre que le sommet de la parabole est placé entre les foyers de ses deux sections principales.

Ainsi le caractère géométrique du paraboloïde elliptique, c'est d'avoir ses deux foyers principaux d'un même côté de l'axe, relativement au sommet; et le caractère du paraboloïde hyperbolique, c'est d'avoir son sommet constamment entre ses deux foyers principaux. Passons maintenant à la formation du système général de trajectoires orthogonales paraboloïdes.

Prenons l'équation

$$[\Sigma_1]\ldots\quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x}{a}=1,$$

qui est susceptible d'appartenir à tous les paraboloïdes possibles, par la variation des signes et de la grandeur de a, b, c. L'équation

Vme MÉMOIRE. générale du plan tangent à cette surface sera

$$\frac{zZ}{c^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{X}{a}=1-\frac{x}{a},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes du plan, et x, y, z celles du point de contact. Soit maintenant

$$[\Sigma_2]\ldots\quad \frac{z^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{6^2}+\frac{2x}{\alpha}=1$$

l'équation générale d'un second paraboloïde. Nous aurons aussi

$$\frac{zZ}{\gamma^2}+\frac{yY}{6^2}+\frac{X}{\alpha}=1-\frac{x}{\alpha}.$$

pour l'équation générale du plan tangent à cette surface.

Si donc nous voulons exprimer que $[\Sigma_1]$ et $[\Sigma_2]$ se coupent *partout* à angle droit, il suffira de multiplier deux à deux les coefficients correspondants de X, Y, Z dans les équations des deux plans tangents, et d'égaler à zéro la somme des produits. Cette opération conduit immédiatement à l'équation de condition

$$\frac{z^2}{c^2\gamma^2}+\frac{y^2}{b^26^2}+\frac{1}{a\alpha}=0,$$

ou

$$(c),\ldots\quad \frac{a\alpha}{c^2\gamma^2}\cdot z^2+\frac{a\alpha}{b^26^2}\cdot y^2+1=0.$$

Maintenant, puisque les surfaces $[\Sigma_1]$ et $[\Sigma_2]$ se coupent partout à angle droit, si nous éliminons x des deux équations qui les représentent, l'équation résultante et celle de condition (c) devront être identiques; or, pour opérer cette élimination, il suffit de tout multiplier par a dans $[\Sigma_1]$, et par α dans $[\Sigma_2]$, on aura ensuite, par une simple soustraction,

$$\left(\frac{a}{c^2}-\frac{\alpha}{\gamma^2}\right)z^2+\left(\frac{a}{b^2}-\frac{\alpha}{6^2}\right)y^2=a-\alpha,$$

ou

$$\frac{a\gamma^2-\alpha c^2}{(\alpha-a)\,c^2\gamma^2}\cdot z^2+\frac{a6^2-\alpha b^2}{(\alpha-a)\,b^26^2}\cdot y^2+1=0.$$

Comparant cette équation à celle que nous venons de trouver

$$(c) \ldots \quad \frac{a\alpha}{c^2\gamma^2} \cdot z^2 + \frac{a\alpha}{b^2\mathcal{C}^2} \cdot y^2 + 1 = 0,$$

leur identité conduit immédiatement aux résultats suivants :

1°. $$a\alpha = \frac{a\gamma^2 - \alpha c^2}{\alpha - a}, \quad \text{ou} \quad a\alpha^2 - a^2\alpha = a\gamma^2 - \alpha c^2,$$

$$\text{ou} \quad a(\alpha^2 - \gamma^2) = \alpha(a^2 - c^2); \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{a^2 - c^2}{2a};$$

2°. $$a\alpha = \frac{a\mathcal{C}^2 - \alpha b^2}{\alpha - a}, \quad \text{ou} \quad a\alpha^2 - a^2\alpha = a\mathcal{C}^2 - \alpha b^2,$$

$$\text{ou} \quad a(\alpha^2 - \mathcal{C}^2) = \alpha(a^2 - b^2); \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha^2 - \mathcal{C}^2}{2\alpha} = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Or, d'après ce que nous avons exposé préliminairement sur les surfaces paraboloïdes, les quantités $\frac{a^2 - b^2}{2a}$, $\frac{\alpha^2 - \mathcal{C}^2}{2\alpha}$ sont les distances de l'origine aux foyers des grandes sections principales (x, y) des surfaces $[\Sigma_1]$ et $[\Sigma_2]$: donc, premièrement, ces foyers sont identiques. De même, $\frac{a^2 - c^2}{2a}$, $\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha}$ représentent la distance de l'origine aux foyers des petites sections principales (x, z) de $[\Sigma_1]$ et $[\Sigma_2]$: donc, secondement, ces foyers sont identiques. Donc enfin, la seule condition nécessaire pour que deux paraboloïdes se coupent partout à angle droit, c'est que le foyer de chacune de leurs sections principales correspondantes et le sommet de la surface, soient respectivement les mêmes.

Passons maintenant à la discussion de l'équation générale

$$\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\mathcal{C}^2} + \frac{2x}{\alpha} = 1,$$

dans laquelle α, $\mathcal{C}$, γ sont liées avec a, b, c par les deux équations de condition

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{\alpha^2 - \mathcal{C}^2}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha},$$

qui laissent par conséquent une des trois constantes α, β, γ entièrement arbitraire.

Supposons, pour fixer les idées, $\beta^2 > \gamma^2$, et regardons γ^2 comme la constante arbitraire. Tant que γ^2 sera positif, les deux foyers de $[\Sigma_1]$ seront placés à gauche du sommet, ainsi que nous l'avons vu plus haut ; ou, ce qui revient au même, le sommet sera placé en dehors et à droite des deux foyers principaux ; il appartiendra donc au paraboloïde elliptique, et tous ces paraboloïdes elliptiques formeront un premier groupe que nous représenterons ainsi,

$$[\Sigma_1] \ldots \quad \frac{z^2}{\gamma'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} + \frac{2x}{\alpha'} = 1.$$

Il est visible encore que plus le sommet s'éloignera des foyers, plus α augmentera, ainsi que β et γ; et ces premiers paraboloïdes qui rempliront de leurs points tout l'espace jusqu'à l'infini, ne pourront se couper entr'eux ; car dans l'équation de condition de leur intersection

$$(c) \ldots \quad \frac{a\alpha}{c^2\gamma^2} \cdot z^2 + \frac{a\alpha}{b^2\beta^2} \cdot y^2 + 1 = 0,$$

tous les termes sont alors nécessairement positifs ; et cette équation ne peut, par conséquent, rien signifier de réel.

En faisant ensuite $\gamma^2 = 0$, il faudra que $z = 0$, c'est l'équation du plan des x, y : l'équation $[\Sigma_1]$ devient alors

$$[1] \ldots \quad \frac{y^2}{B'^2} + \frac{2x}{A'} = 1;$$

c'est une parabole horizontale limite des paraboloïdes, tournée vers les x négatifs, ou vers la gauche. Le sommet de cette courbe a pour abscisse $x = \frac{A}{2}$ (A étant la valeur de α lorsque $\gamma = 0$). Mais dans $\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{a^2 - c^2}{2a}$, lorsque $\gamma^2 = 0 \ldots \alpha = \frac{a^2 - c^2}{a}$. Donc le sommet de la parabole limite, placée dans le plan des x, y,

est au foyer même des sections principales des z et x. On montrerait avec une égale facilité, que cette parabole a pour foyer même, l'autre foyer du paraboloïde. D'ailleurs c'est la condition générale à laquelle sont assujéties toutes les dérivées de l'équation $(\Sigma_1) = 0$, dont la parabole limite $[1] = 0$ n'est qu'un cas particulier.

Si γ^2 continue de décroître après s'être évanoui, il deviendra négatif, et l'équation $[\Sigma_1]$ prendra cette nouvelle forme

$$[\Sigma_2] \ldots \frac{y^2}{6''^2} + \frac{2x}{\alpha''} = 1 + \frac{z^2}{\gamma''^2};$$

c'est l'équation des paraboloïdes hyperboliques (de ceux où le sommet est entre les deux foyers); et l'équation $[\Sigma_2]$ conservera cette forme tant que 6^2, par la diminution continuelle de γ^2, ne sera pas devenu nul, et ensuite négatif.

Lorsque 6^2 s'évanouira, $[\Sigma_2]$ se réduira à

$$[2] \ldots \frac{2x}{A''} = 1 + \frac{z^2}{C''^2},$$

A″ étant la valeur de α lorsque $6^2 = 0$. Mais dans

$$\frac{\alpha^2 - 6^2}{\alpha} = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \text{lorsque } 6 = 0, \quad \alpha = A'' = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Donc la limite des paraboloïdes hyperboliques qui forment le second groupe de nos trajectoires orthogonales; cette limite, dis-je, est une parabole verticale dont le sommet est au foyer commun des sections principales horizontales, tandis que son foyer est aussi celui des sections verticales x, z, puisqu'elle est elle-même une des sections principales du système.

Supposons enfin que 6^2 s'étant évanoui, continue à diminuer, et devienne de plus en plus grand négativement; l'équation $[\Sigma_2]$ se transformera en celle-ci,

$$(\Sigma_3) \ldots \frac{2x}{\alpha''} = 1 + \frac{y^2}{6''^2} + \frac{z^2}{\gamma''^2},$$

équation du paraboloïde de première espèce, mais dirigé vers la droite, tandis que les paraboloïdes de ce genre, mais du premier groupe, sont dirigés vers la gauche.

Ainsi donc, I°. le sommet des différents paraboloïdes du système général peut être à droite des foyers communs de leurs sections principales; alors tous les paraboloïdes sont elliptiques; ils s'étendent tous à l'infini vers la gauche, et ils remplissent exactement l'espace de leurs points.

II°. Le sommet avançant constamment de la droite vers la gauche, arrivera entre les deux foyers communs à tout le système; alors tous les paraboloïdes sont hyperboliques, la section principale du foyer encore à gauche, s'étend par conséquent encore à l'infini vers la gauche, tandis qu'au contraire la section principale du foyer passé à droite, s'est tournée vers la droite, où elle s'étend à l'infini. Tous ces paraboloïdes hyperboliques forment ensemble un second groupe qui, comme le premier, remplit de ses points tout l'espace.

III°. Enfin, le sommet des paraboloïdes avançant toujours de la droite vers la gauche, laissera les deux foyers à droite, et se trouvera à leur gauche; alors tous les paraboloïdes redeviendront elliptiques; ils s'étendront de même à l'infini, mais vers la droite, et ils formeront un troisième groupe qui, comme les deux premiers, remplira tout l'espace de ses points.

D'ailleurs les paraboloïdes elliptiques, premier groupe, étant supposés séparés des paraboloïdes hyperboliques, second groupe, par une parabole horizontale, celle-ci a son sommet au foyer commun des sections verticales, et son foyer au foyer des sections dont elle-même fait partie.

Au contraire, les paraboloïdes elliptiques, troisième groupe, sont séparés des paraboloïdes hyperboliques, second groupe, par une parabole verticale ayant son sommet au foyer commun

des sections horizontales, et son foyer au foyer des sections verticales.

Cette dernière parabole sera le lieu des ombilics de tous les paraboloïdes, premier groupe, comme la première parabole le sera pour tous les paraboloïdes du troisième groupe. Les paraboloïdes hyperboliques ne pouvant jamais avoir d'ombilics, n'en ont point non plus d'indiqués ici.

Après avoir exposé dans tous ses détails la génération des trois groupes de surfaces paraboloïdes trajectoires orthogonales, il nous resterait à prouver que ces surfaces se pénètrent suivant leurs lignes de courbure. C'est ce qu'on peut faire immédiatement par la méthode de l'art. II. Dès-lors on verra I°. que les lignes de courbure du paraboloïde elliptique sont, en projection, des paraboles sur les deux plans principaux, et des ellipses ou des hyperboles pour la projection des lignes de l'une et de l'autre courbure sur un plan normal à l'axe; II°. que les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique sont des paraboles dans les deux premières projections, et des hyperboles dans la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Remarquons que l'examen de notre système ne nous donne pas isolément les propriétés relatives à la courbure d'une seule variété des paraboloïdes, mais bien des deux espèces à la fois; de même que dans la recherche des lignes de courbure des surfaces du second degré ayant un centre, nous n'avons pas trouvé seulement les propriétés de la courbure des ellipsoïdes ou d'un genre d'hyperboloïdes séparément. Car un seul et même système de surfaces trajectoires nous a fait connaître à la fois les propriétés de la courbure des trois genres de surfaces du second degré ayant un centre. La connaissance de l'un de ces genres a pour ainsi dire reflété sa lumière sur la connaissance de la nature des deux autres. C'est là certainement un des plus grands avantages de la méthode que

 nous avons employée. Mais il faut faire voir maintenant qu'elle n'est pas due à la rencontre fortuite d'un cas plus ou moins heureux ; et que le traitement de ce cas n'est que la conséquence d'une théorie générale, également applicable à tous les genres de surfaces.

§ II.

DES SURFACES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UN DEGRÉ ET D'UNE FORME QUELCONQUES.

ARTICLE PREMIER.

Des conditions d'orthogonalité ou d'orthotomie, exprimées par des équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Cette propriété constante qu'ont les surfaces du second degré, d'être coupées suivant leurs lignes de courbure dès qu'elles sont comprises dans un des trois groupes du système de trajectoires orthogonales ; cette propriété, dis-je, n'est point particulière à la famille de surfaces que nous venons d'examiner. Le même théorême s'étend également à toutes les formes possibles, et voici son énoncé le plus général.

Si les surfaces (S_1), (S_2), (S_3) sont supposées se couper deux à deux à angle droit dans tous les points de leurs intersections ; si de plus elles dépendent toutes trois de la valeur absolue d'un même élément α ; quand cet α prendra successivement diverses valeurs α', α'', α''', etc...., les trois surfaces changeant à la fois de forme et de position dans l'espace, se transformeront en autant de nouveaux groupes de trois surfaces $(S_1)'$, $(S_2)'$, $(S_3)'$; $(S_1)''$, $(S_2)''$, $(S_3)''$; $(S_1)'''$, $(S_2)'''$, $(S_3)'''$, etc.....

Cela posé, si toutes les (S_1) sont coupées à angle droit par toutes

les (S_2) et par toutes les (S_3), dans toute l'étendue des traces marquées par celles-ci sur les premières. Si de même les (S_2) et les (S_3) se pénètrent constamment à angle droit; alors « l'intersection des (S_1) et des (S_2) présentera à la fois les lignes d'une des courbures des (S_1) et des (S_2); l'intersection des (S_1) et des (S_3) présentera les lignes de la seconde courbure des (S_1) et de la première des (S_3): enfin, l'intersection des (S_2) et des (S_3) présentera les lignes de seconde courbure de ces deux derniers groupes de surfaces.»

Pour démontrer ce principe général, nous allons d'abord exprimer analytiquement que les surfaces de différents groupes (S_1), (S_2), (S_3) se coupent à angle droit, par le moyen d'équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Ces premières équations ne nous apprendront rien de particulier, il est vrai; mais en passant, par leur moyen, aux différentielles partielles du second ordre, les nouvelles équations de condition qui viendront s'offrir à nous, considérées isolément, seront précisément celles des lignes de courbure des (S_1), des (S_2) et des (S_3); ce qui présentera la démonstration générale du principe que nous venons d'avancer.

Soient donc trois systêmes de surfaces (S_1), (S_2), (S_3) réciproquement orthogonales et de la forme

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad f(x, y, z, \varpi\alpha)=0, \quad \mathrm{f}(x, y, z, \psi\alpha)=0,$$

$\varpi\alpha$ et $\psi\alpha$ étant des fonctions arbitraires dont la nature est donnée par l'orthogonalité même des surfaces de différent groupe. Il est évident qu'en supposant x, y, z déterminés dans ces équations, $\alpha, \varpi\alpha, \psi\alpha$ le seront pareillement; c'est-à-dire, que pour chaque point de l'espace on pourra trouver trois surfaces du systême complet que nous considérons, (S_1), (S_2), (S_3), qui se couperont en ce point à angle droit. Réciproquement aussi, en regardant x, y, z comme des fonctions de α, $\varpi\alpha$, $\psi\alpha$, pour

V.me MÉMOIRE. une valeur particulière de α, de π et de ψ; x, y, z seront déterminés; ils représenteront les points communs aux trois surfaces individuelles correspondantes aux valeurs particulières de α, $\pi\alpha$, $\psi\alpha$, que l'on considère. Cela posé, soient les équations différentielles partielles du premier ordre

$$(\mathrm{I})\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} dz = p'dx + q'dy \\ dz = p''dx + q''dy \\ dz = p'''dx + q'''dy \end{array}\right\} \quad \text{de} \quad \left\{\begin{array}{l} (S_1) \\ (S_2) \\ (S_3) \end{array}\right.$$

et

$$(\mathrm{II})\ldots \quad \left\{\begin{array}{ll} dp' = r'dx + s'dy; & dq' = s'dx + t'dy. \\ dp'' = r''dx + s''dy; & dq'' = s''dx + t''dy. \\ dp''' = r'''dx + s'''dy; & dq''' = s'''dx + t'''dy. \end{array}\right.$$

les équations différentielles du second ordre des mêmes surfaces (S_1), (S_2), (S_3).

Puisque les trois surfaces générales (S_1), (S_2), (S_3) doivent se couper deux à deux à angle droit, on aura d'abord (Monge, premières feuilles d'Analyse),

$$(\mathrm{III})\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} 1 + p'p'' + q'q'' = 0, \\ 1 + p''p''' + q''q''' = 0, \\ 1 + p'''p' + q'''q' = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations de condition sont aussi celles que Lagrange a données dans un Mémoire inséré, si je ne me trompe, parmi ceux de l'Académie de Berlin.

Mais le problème ainsi mis en équation, est plus que déterminé. Pour que le système de ces trois équations puisse réellement appartenir à trois séries de surfaces trajectoires orthogonales, nous allons faire voir qu'il faut de plus qu'elles satisfassent à trois autres équations aux différentielles partielles du second ordre. Or, ainsi que nous l'avons avancé déjà, ces nouvelles équations sont pré-

cisément celles des lignes de courbure des trois groupes de surfaces trajectoires orthogonales. Ce sera l'objet de l'article suivant.

Pour concevoir par la géométrie, quelle est l'influence de ces équations du second ordre, qui nous apprennent ce que les équations du premier n'apprennent pas, observons que quand trois groupes ou séries de surfaces se pénètrent à angle droit, elles présentent trois séries d'intersections qui sont des lignes trajectoires pareillement orthogonales; c'est ce que nous avons appelé *les orthotomiques*. Si donc on mène en chaque point d'un pareil système, trois plans tangents aux trois lignes qui s'y croisent prises deux à deux, il faudra que les trois équations de condition du premier ordre soient satisfaites; et dès qu'elles le seront, les lignes trajectoires se couperont à angle droit.

Mais il ne suffit pas que les lignes des trois séries de lignes trajectoires se coupent partout à angle droit, pour qu'on puisse les supposer placées sur des surfaces trajectoires orthogonales ou orthotomides (*). C'est donc cette dernière propriété que doivent exprimer les trois équations aux différentielles partielles du second ordre dont nous voulons connaître la vraie signification.

Dans la filiation de ces idées, on doit reconnaître celles de Monge, sur les équations qui ne satisfont pas aux conditions

---

(*) Ainsi, par exemple, si nous concevons que sur un sphéroïde, on trace un système de trajectoires orthotomiques, autre que celui des parallèles et des méridiens, puis toutes les normales de ces sphéroïdes; en alongeant ou en diminuant d'une quantité constante toutes les normales à la fois, on formera une infinité de sphéroïdes. En traçant sur ces nouveaux sphéroïdes, de nouvelles trajectoires orthogonales, elles formeront avec les premières et toutes les normales communes, un système de lignes trajectoires orthogonales à trois dimensions. Cependant on ne pourra former avec elles aucun système de surfaces trajectoires orthogonales; car les normales sont alors les intersections de deux systèmes de surfaces gauches qui ne sauraient se couper partout à angle droit.

 d'intégrabilité, et qui dès-lors ne pouvant plus appartenir à des surfaces, appartiennent à des lignes courbes. Seulement, ici, au lieu d'une seule équation aux différentielles partielles, nous avons trois de ces équations liées à trois séries d'un même système de lignes ou de surfaces.

ARTICLE II.

Des conditions d'orthogonalité ou d'orthotomie, exprimées par des équations aux différentielles partielles du second ordre.

Supposons maintenant que du point x, y, z correspondant à trois surfaces trajectoires quelconques, on passe arbitrairement au point infiniment voisin $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, tous les coefficients différentiels varieront à la fois, mais de manière que les équations de condition entre (S_1), (S_2), (S_3) ne cessent pas d'avoir lieu.

Supposons de plus qu'au lieu de passer du point x, y, z au point $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$ dans une direction absolument arbitraire, nous marchions sur l'intersection des surfaces (S_2) et (S_3). Il est évident que les trois surfaces (S_1), (S_2), (S_3) se coupant en x, y, z à angle droit, l'intersection des surfaces (S_2) et (S_3) sera normale en ce point à la surface (S_1). Mais d'ailleurs les équations de cette normale sont

$$(Z-z)\,p'+X-x=0,$$
$$(Z-z)\,q'+Y-y=0;$$

et elles donnent

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{dZ}&=-p'\\ \frac{dY}{dZ}&=-q'\end{aligned}\right\}\quad \text{d'où}\quad \frac{dY}{dX}=\frac{q'}{p'}.$$

Ces valeurs de $\frac{dX}{dZ}$, $\frac{dY}{dZ}$ seront donc celles de $\frac{\delta x}{\delta z}$, $\frac{\delta y}{\delta z}$, et tout rentrera dans le calcul ordinaire des différentielles partielles. Observons maintenant que quand nous passons du point x, y, z au

point $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ placé sur l'intersection des surfaces (S_2) et (S_3), ces deux surfaces ne cessent pas de se pénétrer à angle droit : donc alors l'équation

$$1+p''p'''+q''q'''=o,$$

qui marque cette orthogonalité, ne doit pas cesser d'avoir lieu. Donc aussi nous aurons

$$p'''dp''+q'''dq''+p''dp'''+q''dq'''=o,$$

équation où dp'', dq'', dp''', dq''' doivent être prises relativement aux dx, dy, dz dont les rapports $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ sont liés entr'eux par les relations qu'a fournies l'équation de la normale à la surface (S_1).

Mais en vertu des équations (II), cette équation devient

$$p'''[r''dx+s''dy]+q'''[s''dx+t''dy]+p''[r'''dx+s'''dy]+q''[s'''dx+t'''dy]=o.$$

Or, $\frac{dy}{dx}=\frac{q'}{p'}$ est la condition pour que cette équation indique qu'on marche sur la normale de (S_1): divisant tout par dx, substituant ensuite $\frac{q'}{p'}$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$, et multipliant après par p', il viendra donc

$$p'''[r''p'+s''q']+q'''[s''p'+t''q']+p''[r'''p'+s'''q']+q''[s'''p'+t'''q']=o,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme suivante,

$$r''.p'''p'+s''[p'''q'+q'''p']+t''.q'''q'+r'''.p''p'+s'''[p''q'+q''p']+t'''.q''q'=o.$$

Si au lieu de marcher sur l'intersection de (S_2) et (S_3), j'avais marché sur l'intersection de (S_1) et (S_3), il est visible que j'aurais obtenu une équation de condition aux différentielles partielles secondes, semblable à celle-ci, et identique avec elle, en y changeant les signes $(')$ en $('')$, et réciproquement. De même encore, si j'avais coordonné les dx, dy, dz de manière à marcher sur l'intersection (S_1) et (S_2), j'aurais obtenu une équation identique à la première, en y changeant les $(')$ en $(''')$, et réciproquement; et identique

 avec la seconde, en y changeant les ($''$) en ($'''$), et réciproquement. Donc, enfin, en effectuant ces diverses transmutations, nous obtiendrons aux différentielles partielles secondes, les trois équations de condition suivantes : (α)....

$$\begin{cases} r'''.p''p'+s'''[p''q'+q''p']+t'''.q''q' + r''.p'''p'+s''[p'''q'+q'''p']+t''.q'''q'=0, \\ r'''.p'p''+s'''[p'q''+q'p'']+t'''.q'q'' + r'.p'''p''+s'[p'''q''+q'''p'']+t'.q'''q''=0, \\ r''.p'p'''+s''[p'q'''+q'p''']+r''.q'q''' + r'.p''p'''+s'[p''q'''+q''p''']+t'.q''q'''=0. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que dans ces équations, les trois premiers termes de la première, sont identiques avec les trois premiers de la seconde; les trois derniers de la première avec les trois premiers de la troisième équation; enfin, les trois derniers de la seconde avec les trois derniers de la troisième équation. Il suit de là que ces équations peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} A'''+A''&=0, \\ A'''+A'&=0, \\ A''+A'&=0, \end{aligned}$$

A', A'', A''' représentant les parties de ces équations où se trouvent (r', s', t'), (r'', s'', t''), (r''', s''', t''') ce qui donne immédiatement

$$A'=0, \qquad A''=0, \qquad A'''=0.$$

Substituant pour A', A'', A''' leurs premières valeurs, nous aurons

$$(\text{A})\ldots \begin{cases} r'.p''p''' + s'\,(p''q''' + q''p''') + t'.q''q''' = 0, \\ r''.p'p''' + s''\,(p'q''' + q'p''') + t''.q'q''' = 0, \\ r'''.p'p'' + s'''\,(p'q'' + q'p'') + t'''.q'q'' = 0. \end{cases}$$

Si nous observons maintenant que les équations des normales à (S_1), (S_2), donnent respectivement en x et y,

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{q'}{p'}, \quad \frac{Y-y}{X-x}=\frac{q''}{p''}, \quad \frac{Y-y}{X-x}=\frac{q'''}{p'''};$$

ce seront les équations de la projection de ces trois normales sur le plan des x, y, et en faisant

$$\frac{q'}{p'}=\chi, \quad \frac{q''}{p''}=\psi, \quad \frac{q'''}{p'''}=\varphi,$$

les trois équations (A) deviendront

$$\text{(IV)}\ldots \begin{cases} r'+s'[\varphi+\psi]+t'.\varphi\psi=0, \\ r''+s''[\varphi+\chi]+t''.\varphi\chi=0, \\ r'''+s'''[\chi+\psi]+t'''.\chi\psi=0. \end{cases}$$

Or ces équations sont précisément celles que nous avons trouvées pour l'expression des *tangentes conjuguées* [second Mémoire, § II, art. I]. Voyez aussi le paragraphe suivant. Cette observation seule suffirait déjà pour nous convaincre que les intersections rectangulaires des surfaces trajectoires que nous considérons, sont les lignes mêmes de courbure de ces surfaces. Mais nous allons nous élever directement à cette dernière conséquence.

En reprenant les équations (III), art. précédent, il est évident que la seconde nous donnera

$$-1=p''p'''+q''q'''$$

et les deux autres,

$$+1=(p'p''+q'q'')(p'p'''+q'q''');$$

et par conséquent,

$$p''p'''+q''q'''+(p'p''+q'q'')(p'p'''+q'q''')=0,$$

ou

$$1+\frac{q''}{p''}\cdot\frac{q'''}{p'''}+\left(p'+q'\frac{q''}{p''}\right)\left(p'+q'\frac{q'''}{p'''}\right)=0.$$

Si dans cette équation nous substituons pour $\frac{q''}{p''}$, $\frac{q'''}{p'''}$ leurs valeurs ψ et φ, nous aurons

$$1+\varphi\psi+[p'+q'\psi][p'+q'\varphi]=0.$$

En combinant cette équation avec la première des équations de

 condition (IV) qu'entraîne l'orthogonalité des surfaces,

$$r' + s'(\varphi + \psi) + t'\varphi\psi = 0;$$

en éliminant ψ par son moyen, et substituant pour φ sa valeur $\frac{dy}{dx}$, nous aurons immédiatement

$$(C)\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q'^2)s' - p'q't'] + \frac{dy}{dx}[(1+q'^2)r' - (1+p'^2)t'] + p'q'r' - (1+p'^2)s' = 0;$$

c'est l'équation des lignes de courbure que Monge a donnée d'abord dans son Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, puis dans ses leçons à l'École Polytechnique.

On voit donc enfin que les courbes d'intersection des surfaces trajectoires orthogonales, sont nécessairement des lignes de courbure à la fois sur les deux surfaces dont elles sont respectivement les communes intersections.

Si nous supposons maintenant que les surfaces d'un des groupes soient données; les (S_1), par exemple; les valeurs de p', q', r', s', t' le seront pareillement. On substituera ces valeurs dans les équations de condition du premier et du second ordre que nous avons trouvées, et ce sera alors l'affaire du calcul intégral aux différentielles partielles, de remonter aux fonctions primitives des (S_2) et des (S_3) : on pourra le faire d'une infinité de manières, ce qui présentera une infinité de systèmes de trajectoires orthogonales différents. Mais je ne m'étendrai pas sur ce sujet, parce que je me propose d'y revenir par la suite.

ARTICLE III.

Des surfaces développables trajectoires orthogonales des surfaces quelconques.

Une chose extrêmement remarquable, c'est que les équations de condition (C), équivalentes à celles (α), ou (A), ou (IV), contiennent

respectivement p', q', r', s', t', ou p'', q'', r'', s'', t'', ou $p''', q''', r''', s''', t'''$
isolés. D'où résulte cette conséquence : *quels que soient les systêmes de trajectoires orthogonales dans lesquels entre une surface donnée, toutes les courbes de trajection tracées sur elle par les surfaces de deux groupes étrangers à celui qui la contient; ces courbes,* dis-je, *sont constamment les mêmes, et par conséquent elles ne dépendent que de la nature de la surface donnée.* Examinons de plus près ce que peuvent être ces courbes qui tiennent aux trajections orthogonales des surfaces, et les déterminent ainsi, sans cependant en dépendre.

Si nous supposons qu'un des systèmes doive être composé de surfaces développables, il est facile de voir que les arêtes de ces surfaces seront les normales des surfaces d'un des deux autres systêmes, du premier, par exemple.

Supposons en effet que les surfaces (S_3) doivent être des surfaces développables, condition qui, comme on sait, exigera que

$$\frac{r'''}{s'''} = \frac{s'''}{t'''} = -\frac{dy}{dx},$$

c'est l'équation de la projection horizontale des arêtes. Mais cette même condition rend la troisième équation de condition (α),

$$r''' + s'''(\chi + \psi) + t'''\chi\psi = 0,$$

décomposable en deux facteurs

$$(r''' + s'''\chi)\left(1 + \frac{t'''}{s'''}\psi\right) = 0,$$

équation qui pourrait être satisfaite en égalant à zéro l'un ou l'autre facteur, sans cesser de donner pour $\frac{dy}{dx}$ la même valeur; mais χ et ψ ne peuvent être identiques que pour quelques points, ou pour des positions particulières du systême général; donc un seul de ces facteurs doit être nul, et l'autre reste arbitraire.

 Soit maintenant

$$r''' + s'''\chi = 0 \quad \text{d'où} \quad \chi = -\frac{r''}{s''} = \frac{dy}{dx};$$

Or $\chi = \frac{dy'}{dx} = \frac{q'}{p'}$ est la projection horizontale des normales aux surfaces (S_1) : donc, premièrement, *si l'un des systèmes est composé de surfaces développables, les arêtes seront nécessairement normales aux surfaces de l'un des deux autres groupes* (article précédent).

D'un autre côté, la grandeur χ étant la même dans les deux dernières équations de condition (IV), l'équation $\chi - \frac{dy}{dx} = 0$ sera celle de la projection horizontale de l'intersection des surfaces (S_2) et (S_3). Mais lorsque les surfaces (S_3) sont développables,

$$-\chi = \frac{r''}{s''} = \frac{s''}{t''} \quad \text{et} \quad \chi - \frac{dy}{dx} = 0$$

est l'équation différentielle des arêtes des surfaces (S_3) : donc alors *les communes intersections des surfaces* (S_2) *avec les* (S_3) *sont précisément les arêtes de ces dernières :* ce que d'ailleurs nous aurions pu conclure immédiatement du théorême précédent.

Puisque l'équation $\chi - \frac{dy}{dx} = \chi + \frac{r''}{s''} = 0$ doit avoir lieu en même temps que $r'' + s''(\varphi + \chi) + t''\varphi\chi = 0$ dans toute l'étendue de chaque arête des (S_3), il faudra que χ ne puisse varier dans cette équation, quelque valeur que φ puisse prendre.

Or, cette condition exige d'abord que la partie $s''\varphi'' + t''\varphi\chi$, qui contient φ dans l'équation précédente, ne change pas, quelque valeur que prenne φ'', ce qui ne se peut qu'en faisant

$$s'' + t''\chi = 0.$$

Il faut donc aussi que l'autre partie de la même équation soit nulle d'elle-même et qu'on ait

$$r'' + s''\chi = 0.$$

Ces deux conditions réunies donnent, en éliminant χ, $r''t''-s''^2=0$, équation qui montre que toutes les surfaces (S_2) sont aussi développables. (Voyez Mémoire III, art. III, pag. 156.)

Enfin, ces conditions n'influant en rien sur les valeurs absolues de φ et ψ, la première équation (α) conserve toute sa généralité, et l'équation (C) qui n'en est qu'une conséquence, restant toujours la même, représente aussi toujours les mêmes lignes sur la surface (S_1) qui n'a pas cessé d'être quelconque, et dont ces lignes sont par conséquent celles qu'on est convenu d'appeler *lignes de courbure :* d'où résulte ce théorême : « non-seulement les normales d'une surface, peuvent former une suite de surfaces développables, mais toutes ces premières développables sont croisées à angle droit par un second groupe de surfaces pareillement développables, et les courbes trajectoires orthogonales (C) [article précédent], sont précisément les traces imprimées sur la surface primitive (S_1) par les surfaces développables de ses propres normales. »

Maintenant il nous serait facile de déduire toute la théorie des lignes de courbure, comme une simple conséquence du théorême général que nous avons exposé. Ce théorême donne plus que ce que l'on considère ordinairement dans cette théorie.

Si nous prenons un point x, y, z intersection de trois surfaces (S_1), (S_2), (S_3), nous verrons que chaque ligne de courbure appartenant aux deux surfaces dont elle est l'intersection, sera aussi la ligne de courbure de deux surfaces développables; et qu'ainsi nous aurons à considérer pour la surface (S_1), par exemple, les développables ($\Delta_{\prime,\prime\prime}$), ($\Delta_{\prime,\prime\prime\prime}$) dont les arêtes sont normales à cette surface (S_1), et tangentes aux surfaces (S_2) et (S_3); ensuite les développables ($\Delta_{\prime\prime,\prime}$), ($\Delta_{\prime\prime,\prime\prime\prime}$), normales à la surface (S_2), et tangentes à celles (S_1) et (S_3). Il y aura donc ainsi deux surfaces développables, telles qu'une même ligne de courbure sera développante de leur arête de rebroussement; et pour envisager complet-

tement la courbure des surfaces en chaque point, il faudra déterminer la nature et la forme des quatre développables appartenant aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Celles qui sont formées par des normales marquent, si je puis parler ainsi, la courbure des lignes de courbure dans la surface qui leur appartient, c'est un élément du second ordre; les surfaces développables formées par des tangentes, marquent la flexion que prend la ligne de courbure sur la surface; c'est déjà un élément du troisième ordre.

Ces considérations me rappellent des idées belles et vraiment neuves que Lancret avait conçues, et qu'il a, je crois, développées dans un Mémoire inséré parmi ceux des Savants étrangers (Mémoires de l'Institut, première classe). Je ne puis que les indiquer ici, parce que leur auteur ne me les avait, pour ainsi dire, qu'indiquées (*). Pourquoi faut-il que la mort nous ait ravi un des anciens élèves de l'École Polytechnique, qui, contemporain de ce Dupuis qui n'est plus, et de plusieurs hommes célèbres qui sont encore, semblait promettre de beaux progrès à la géométrie analytique et descriptive. De long-temps l'École Polytechnique ne comptera parmi ses chefs de brigade, des Lancret, des Biot, des Brisson, des Dupuis, des Malus, des Poisson, et d'autres encore qui, pour avoir un mérite moins éminent, n'en sont pas moins de beaucoup supérieurs à la classe ordinaire des Professeurs et des Ingénieurs instruits.....

(*) Lors de mon dernier passage à Paris, en 1805.

FIN DU CINQUIÈME MÉMOIRE.

NOTES PRINCIPALES

DU CINQUIÈME MÉMOIRE.

NOTE PREMIÈRE.

Propriétés des lignes de courbure des surfaces du second degré, par rapport à leur projection sur les plans principaux. De la projection des lignes de courbure en général.

Les lignes de courbure des surfaces du second degré jouissent d'une propriété générale bien remarquable : faisons-la connaître d'abord, nous la démontrerons ensuite.

Supposons, pour fixer les idées, que nous ayons projeté toutes les lignes de courbure d'une surface du second degré sur le plan principal des x, y. Nous allons avoir deux séries de lignes essentiellement distinctes. L'une offrant la projection de toutes les lignes de plus grande courbure; l'autre la projection de toutes les lignes de moindre courbure de la surface du second degré que nous considérons.

Maintenant, chaque ligne de l'une ou de l'autre série peut être considérée comme la *base*, je veux dire comme la section principale x, y d'une certaine surface du second degré, dont les lignes de courbure auront pour projection sur le plan des x, y, les deux séries de lignes que nous considérons.

Voilà donc deux séries bien distinctes de surfaces du second degré, les premières auront respectivement pour base ou section principale des x, y, une des projections des lignes de moindre courbure; les autres une des projections des lignes de plus grande courbure.

Et toutes ces surfaces, comme nous l'avons dit, n'auront cependant sur le plan des x, y, qu'un seul et même système de projections pour leurs lignes de plus grande et de moindre courbure.

Pour démontrer ce théorême général, reprenons l'équation qui appartient à la

Vme MÉMOIRE. projection des lignes de courbure sur le plan des x, y (art. III de ce Mémoire), elle est

$$(p)\ldots\quad \frac{a^2-c^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{\mathcal{C}^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=1,$$

équation où les constantes arbitraires α, $\mathcal{C}$ sont liées entr'elles par l'équation de condition

$$\alpha^2-\mathcal{C}^2=a^2-b^2.$$

Puisque l'une des grandeurs constantes α, $\mathcal{C}$ est arbitraire, faisons $\alpha^2=a^2-c^2$, en vertu de la condition précédente, nous aurons

$$\mathcal{C}^2=b^2-c^2:$$

donc alors l'équation (p) deviendra simplement

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Or cette équation est précisément ce que devient celle de la surface primitive du second degré

$$(S)\ldots\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

lorsqu'on y fait $z=0$, c'est-à-dire lorsqu'on se place sur la section principale des x, y. Donc, premièrement, *dans les surfaces du second degré, chaque section principale est toujours une ligne de courbure.*

Actuellement si nous considérons l'équation de la projection

$$(p)\ldots\quad \frac{a^2-c^2}{a^2\alpha^2}\cdot x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2\mathcal{C}^2}\cdot y^2=1,$$

nous verrons que a, b, c peuvent prendre une infinité de valeurs différentes a', b', c', sans que cette équation change en rien pour cela. Car il suffit de faire

$$\frac{a^2-c^2}{a^2\alpha^2}=\frac{a'^2-c'^2}{a'^2\alpha'^2}=\frac{1}{m^2}\quad\text{et}\quad\frac{b^2-c^2}{b^2\mathcal{C}^2}=\frac{b'^2-c'^2}{b'^2\mathcal{C}'^2}=\frac{1}{n^2},$$

et d'exprimer que *les axes* m et n doivent toujours rester les mêmes. Voyons actuellement comment nous pourrons satisfaire à cette nouvelle condition : elle donne

$$\alpha^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot m^2,\quad \mathcal{C}^2=\frac{b^2-c^2}{b^2}\cdot n^2;$$

donc en vertu de l'équation de condition rapportée ci-dessus, j'ai

$$\alpha^2-\mathcal{C}^2=a^2-b^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot m^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}\cdot n^2,$$

ou

$$\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{m^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{n^2}{b^2}=1.$$

Maintenant m dépendra toujours de n de la même manière, si a, b, c, quoique prenant des valeurs différentes, sont pourtant toujours tels que, en appellant P et Q deux constantes, on ait

$$a^2.\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}=P^2 \quad \text{et} \quad b^2.\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}=Q^2.$$

Mais ces deux équations donnent aussi

$$\frac{a^2}{P^2}(a^2-b^2)=a^2-c^2 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{Q^2}(a^2-b^2)=b^2-c^2.$$

Si nous retranchons membre à membre la seconde de la première, et qu'ensuite nous divisions tout par (a^2-b^2), nous aurons

$$\frac{a^2}{P^2}+\frac{b^2}{Q^2}=1,$$

équation dans laquelle deux valeurs simultanées de a, b seront deux premiers axes d'une surface du second degré dont les lignes de courbure sont telles, que leur projection sur le plan de ces axes, sera constamment la même.

Mais si dans l'équation aux axes des lignes de courbure projetées sur le plan principal x, y,

$$\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{m^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{n^2}{b^2}=1,$$

on met pour les coefficients de m^2 et n^2 leur valeur $\frac{1}{P^2}$ et $\frac{1}{Q^2}$, il vient

$$\frac{m^2}{P^2}+\frac{n^2}{Q^2}=1.$$

Donc « l'équation qui fait connaître les axes des lignes de courbure projetées sur le plan principal des x, y est identique avec l'équation qui fait connaître les axes x et y des surfaces du second degré auxquelles ces mêmes projections appartiennent. »

Telle est la démonstration analytique du théorème général que nous avons énoncé au commencement de cet article.

Ces propriétés des surfaces du second degré sont liées à des propriétés de l'étendue plus générales, et que pour le moment nous n'indiquerons qu'en passant.

Vme MÉMOIRE. Lorsqu'on donne, toujours sur le plan des x, y, deux systêmes de courbes

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \quad \Psi(x, y, \zeta) = 0,$$

quoique celles du premier systême soient rencontrées par celles du second sous un angle variable en général, on peut toujours trouver dans l'espace une infinité de systêmes de lignes trajectoires orthogonales dont ces courbes soient les projections.

Et non-seulement on peut résoudre ainsi la question d'une infinité de manières; mais on peut encore exiger que ces lignes trajectoires orthogonales soient les lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface que leur ensemble représente.

Malgré cette seconde restriction, on trouve encore que le problême est susceptible d'une infinité de solutions; et l'on parvient à ce résultat singulier : *Si l'on se donne un seul point de la surface cherchée, et une droite tangente en ce point à la surface, cette surface est entièrement déterminée.*

Or, sans connaître la surface demandée, on peut trouver *à priori* ses rayons de courbure, dès que cette droite tangente arbitraire au point que l'on considère est donnée.

On peut déterminer séparément les surfaces développables circonscrites à la surface cherchée suivant toutes les lignes de courbure dont la projection est donnée. Ensuite on sait comment, par la variation d'un paramètre, on trouverait l'équation de la surface enveloppe.

Pour déterminer ainsi chaque surface développable, on a d'abord la projection de toutes ses arêtes rectilignes, ce sont les tangentes à toutes les projections des lignes de courbure d'une même série, en prenant pour points de contact les divers points d'une seule et même ligne de l'autre série. Il suffit ensuite d'exprimer que, dans l'espace, cette ligne seconde série est rencontrée à angle droit par toutes les arêtes de la surface développable demandée.

Au reste, la solution générale de ces questions mérite d'être traitée à part, et c'est ce que nous essaierons de faire par la suite. Nous observerons seulement que les principes exposés dans nos premiers Mémoires, présentent la question sous une forme très-simple; car ces principes ont l'avantage de donner, dans le cas qui nous occupe, deux équations qui contiennent séparément les éléments différentiels partiels du premier et du second ordre.

En effet, nous avons fait voir qu'en représentant par ϕ et ψ les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui, sur le plan des x, y, fixent la direction des projections des deux lignes

de courbure, on doit toujours avoir les deux équations

$$1+p^2+pq(\varphi+\psi)+(1+q^2)\varphi\psi=0$$

et

$$r+s(\varphi+\psi)+t\varphi\psi=0,$$

p, q étant les coefficients différentiels partiels du premier ordre, et r, s, t ceux du second.

Or ici φ et ψ sont connus, puisqu'on se donne la projection des lignes de courbure sur le plan des x, y.

Si entre ces deux équations on élimine φ ou ψ, on a de suite l'équation ordinaire aux lignes de courbure. Mais les deux équations qui la remplacent ont sur elle l'avantage d'offrir séparément, ainsi que nous l'avons déjà dit, les éléments du premier et du second ordre.

NOTE II.

De la génération des lignes de courbure des surfaces du second degré, par un mouvement continu.

Nous allons d'abord démontrer par l'analyse, la description géométrique des surfaces du second degré en général; telle que nous l'avons énoncée premier Mémoire, page 32, et quatrième Mémoire, page 284. Nous verrons ensuite comment le même mode de génération s'applique à la description des lignes de courbure de ces surfaces.

Rappelons-nous toujours que x, y, z étant trois coordonnées rectangulaires, et X, Y, Z trois constantes arbitraires quelconques, toute équation de la forme

$$\frac{x^2}{X^2}+\frac{y^2}{Y^2}+\frac{z^2}{Z^2}=1$$

est celle des surfaces du second degré rapportées à leur centre comme origine, et à leurs plans principaux comme plans coordonnés. (X, Y, Z sont les demi-axes.)

Maintenant, appelons X, Y, Z les trois parties invariables de la droite mobile, qui sont respectivement les distances du point générateur x, y, z aux plans coordonnés rectangulaires des y, z, des x, z et des x, y.

Ensuite désignons les coordonnées des points où la droite mobile rencontre

Vme MÉMOIRE. les plans coordonnés

$$\text{des}\left\{\begin{matrix} y, z \\ x, z \\ x, y \end{matrix}\right\} \quad \text{par} \quad \left\{\begin{matrix} 0, y', z', \\ x'', 0, z'', \\ x''', y''', 0. \end{matrix}\right.$$

On sait que les parties d'une ligne droite sont proportionnelles aux projections de ces mêmes parties sur un plan quelconque. En considérant successivement les projections des parties X, Y, Z sur les trois plans coordonnés, on aura donc

$$(m)\ldots\left\{\begin{matrix} \frac{x}{X} = \frac{x-x''}{Y} = \frac{x-x'''}{Z} \\ \frac{y-y'}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{y-y'''}{Z} \\ \frac{z-z'}{X} = \frac{z-z''}{Y} = \frac{z}{Z}. \end{matrix}\right.$$

Mais la partie X de la droite mobile comprise entre le point générateur x, y, z et le point $0, y', z'$ placé sur le plan des y, z; cette longueur, dis-je, donne évidemment

$$x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = X^2,$$

ou

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{(y-y')^2}{X^2} + \frac{(z-z')}{X^2} = 1.$$

Mais nous venons de voir, par les équations de condition (m), que

$$\frac{y-y'}{X} = \frac{y}{Y} \quad \text{et} \quad \frac{z-z'}{X} = \frac{z}{Z}.$$

Donc aussi,

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} + \frac{z^2}{Z^2} = 1.$$

Or cette équation est précisément celle des surfaces du second degré ayant pour demi-axes X, Y, Z.

Donc enfin, *lorsqu'une droite mobile a trois de ses points assujétis à rester respectivement sur trois plans rectangulaires, chacun de ses autres points décrit une surface du second degré, ayant pour centre la commune intersection de ces plans, et pour plans principaux ces plans eux-mêmes.*

Supposons maintenant qu'au lieu de décrire toute la surface du second degré, par le moyen d'un des points de la droite mobile, on veuille seulement décrire une ligne de courbure de cette surface.

L'équation générale des lignes de courbure d'une surface du second degré

$$\frac{x^2}{X^2}+\frac{y^2}{Y^2}+\frac{z^2}{Z^2}=1,$$

peut toujours, ainsi que nous l'avons fait voir § Ier, art. III de ce Mémoire, se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1.$$

Voyons donc, en conservant toujours la notation adoptée au commencement de cette note; voyons, dis-je, quelles seront les valeurs relatives de x'' et y'' dans la nouvelle hypothèse que nous venons de former. (x'', y'' représentent les coordonnées du point de la droite mobile qui doit toujours rester sur le plan coordonné des x, y.)

Les équations de condition (m) nous donnent

$$\frac{x}{X}=\frac{x-x''}{Z} \quad \text{et} \quad \frac{y}{Y}=\frac{y-y''}{Z};$$

donc

$$x=\frac{X}{X-Z}.x'' \quad \text{et} \quad y=\frac{Y}{Y-Z}.y'';$$

enfin ces valeurs substituées dans l'équation de la courbe proposée, donnent

$$\left(\frac{X}{X-Z}\right)^2\frac{x''^2}{m^2}+\left(\frac{Y}{Y-Z}\right)^2\frac{y''^2}{n^2}=1.$$

Or, cette équation est encore du second degré, et elle nous fait voir que « quand le point générateur décrit sur la surface une courbe qui, projetée *sur* » *un plan principal*, est une courbe du second degré symétrique par rapport aux axes » de la surface, la droite mobile qui porte ce point générateur, trace *sur le même* » *plan principal*, une courbe aussi du second degré et pareillement symétrique par » rapport aux axes de la surface.

» Telle doit donc être la trace de la droite mobile sur chaque plan principal, » lorsque le point générateur décrit une ligne de courbure de la surface du » second degré. »

Remarquons que dans l'équation de cette trace,

$$\left(\frac{X}{X-Z}\right)^2\frac{x''^2}{m^2}+\left(\frac{Y}{Y-Z}\right)^2\frac{y''^2}{n^2}=1.$$

La valeur des demi-axes ou des parties de la droite mobile secondaire, à l'aide de laquelle on pourrait décrire cette trace (cette droite mobile étant tout entière dans

 le plan des x, y s'appuierait alors sur les axes des x et des y); cette valeur, disons-nous, est

$$\frac{X-Z}{X}.m, \text{ pour l'axe des } x,$$

et

$$\frac{Y-Z}{Y}.n, \text{ pour l'axe des } y.$$

Pour compléter ce qu'on peut dire sur la génération des surfaces du second degré, dont nous venons de donner une idée, nous allons faire voir que quand même on prendrait de la manière la plus arbitraire, les trois *plans directeurs*, c'est-à-dire, ceux sur lesquels doivent rester trois points déterminés de la droite mobile, la surface engendrée par chaque point de la droite mobile n'en serait pas moins encore une surface du second degré, ayant pour centre l'intersection des trois plans directeurs, etc.

Pour cela, regardons l'intersection même des trois *plans directeurs* comme l'origine des coordonnées, et rapportant tout à trois plans coordonnés rectangulaires, soient

$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a''x + b''y + c''z = 0$$
$$a'''x + b'''y + c'''z = 0$$

les équations générales des trois plans directeurs.

Maintenant appelons x, y, z les coordonnées du point de la droite mobile qui doit décrire la surface que nous cherchons; appelons ensuite x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les coordonnées des trois points de la droite mobile, qui doivent demeurer respectivement sur le premier, le second et le troisième plan directeur.

En vertu des équations de ces trois plans, nous aurons d'abord

$$a'x' + b'y' + c'z' = 0,$$
$$a''x'' + b''y'' + c''z'' = 0,$$
$$a'''x''' + b'''y''' + c'''z''' = 0.$$

Mais les quatre points x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' étant, par hypothèse, en ligne droite; si nous appelons X, Y, Z les distances du premier point à chacun des trois autres, cette condition fournira les trois nouvelles équations

$$\frac{x-x'}{X}=\frac{x-x''}{Y}=\frac{x-x'''}{Z},$$

$$\frac{y-y'}{X}=\frac{y-y''}{Y}=\frac{y-y'''}{Z},$$

$$\frac{z-z'}{X}=\frac{z-z''}{Y}=\frac{z-z'''}{Z}.$$

Si dans ces équations nous voulons obtenir x''', y''', z''' en x, y, z et x', y', z', nous aurons immédiatement

$$x'''=\frac{Xx-Z(x-x')}{X},$$

$$y'''=\frac{Xy-Z(y-y')}{X},$$

$$z'''=\frac{Xz-Z(z-z')}{X}.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation du troisième plan directeur,

$$a'''x'''+b'''y'''+c'''z'''=0,$$

les coordonnées auxiliaires x''', y''', z''' disparaissent, et il vient

$$X[a'''x+b'''y+c'''z]-Z[a'''(x-x')+b'''(y-y')+c'''(z-z')]=0.$$

En déterminant successivement et de la même manière, x'', y'', z''; x', y', z' au lieu de x''', y''', z''', nous aurons donc les trois équations symétriques suivantes,

$$X[a'x+b'y+c'z]-X[a'(x-x')+b'(y-y')+c'(z-z')]=0,$$
$$X[a''x+b''y+c''z]-Y[a''(x-x')+b''(y-y')+c''(z-z')]=0,$$
$$X[a'''x+b'''y+c'''z]-Z[a'''(x-x')+b'''(y-y')+c'''(z-z')]=0.$$

Si, pour plus de simplicité, nous désignons par α', β', γ' les coefficients de $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$ dans la première équation; et par α'', β'', γ''; α''', β''', γ''', les coefficients analogues dans la seconde et dans la troisième; enfin, si nous représentons par Ω', Ω'', Ω''' les termes de la forme $X[a'x+b'y+c'z]$ qui contiennent x, y, z dans ces trois équations; par ces simplifications, au lieu des trois équations précédentes, nous aurons celles-ci,

$$\Omega'-\alpha'(x-x')-\beta'(y-y')-\gamma'(z-z')=0,$$
$$\Omega''-\alpha''(x-x')-\beta''(y-y')-\gamma''(z-z')=0,$$
$$\Omega''-\alpha''(x-x')-\beta''(y-y')-\gamma''(z-z')=0.$$

Multipliant la première de ces équations par le facteur arbitraire λ', la seconde par λ'', la troisième par λ''', et les ajoutant ensuite membre à membre, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'\Omega' - \lambda'\alpha' \\ +\lambda''\Omega'' - \lambda''\alpha'' \\ +\lambda'''\Omega''' - \lambda'''\alpha''' \end{array}\right| (x-x') \left.\begin{array}{r} -\lambda'\beta' \\ -\lambda''\beta'' \\ -\lambda'''\beta''' \end{array}\right| (y-y') \left.\begin{array}{r} -\lambda'\gamma' \\ -\lambda''\gamma'' \\ -\lambda'''\gamma''' \end{array}\right| (z-z') = 0.$$

Si nous supposons en premier lieu qu'on ait les deux équations de condition

$$(\lambda)\ldots\ \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda'\beta' + \lambda''\beta'' + \lambda'''\beta''', \\ 0 = \lambda'\gamma' + \lambda''\gamma'' + \lambda'''\gamma''', \end{array}\right.$$

il vient

$$x - x' = \frac{\lambda'\Omega' + \lambda''\Omega'' + \lambda'''\Omega'''}{\lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' + \lambda'''\alpha'''}.$$

Mais comme les trois multiplicateurs ne sont liés que par deux équations de condition (λ), nous pouvons supposer l'un d'eux égal à l'unité, λ, par exemple; alors on a

$$\lambda'' = \frac{\beta'\gamma''' - \gamma'\beta'''}{\gamma''\beta''' - \beta''\gamma'''},$$

$$\lambda''' = \frac{\gamma'\beta'' - \beta'\gamma''}{\gamma''\beta''' - \beta''\gamma'''}.$$

On a donc enfin, en chassant le dénominateur commun aux deux termes,

$$x - x' = \frac{(\gamma''\beta''' - \beta''\gamma''')\Omega' + (\beta'\gamma''' - \gamma'\beta''')\Omega'' + (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')\Omega'''}{(\gamma''\beta''' - \beta''\gamma''')\alpha' + (\beta'\gamma''' - \gamma'\beta''')\alpha'' + (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')\alpha'''};$$

ensuite,

$$y - y' = \frac{(\gamma''\alpha''' - \alpha''\gamma''')\Omega' + (\alpha'\gamma''' - \gamma'\alpha''')\Omega'' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')\Omega'''}{(\gamma''\alpha''' - \alpha''\gamma''')\beta' + (\alpha'\gamma''' - \gamma'\alpha''')\beta'' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')\beta'''},$$

et enfin,

$$z - z' = \frac{(\beta''\alpha''' - \alpha''\beta''')\Omega' + (\alpha'\beta''' - \beta'\alpha''')\Omega'' + (\beta'\alpha'' - \alpha'\beta'')\Omega'''}{(\beta''\alpha''' - \alpha''\beta''')\gamma' + (\alpha'\beta''' - \beta'\alpha''')\gamma'' + (\beta'\alpha'' - \alpha'\beta'')\gamma'''}.$$

Mais nous avons appelé X, Y, Z les distances respectives du point x, y, z aux points x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''. Si donc, pour abréger, nous représentons par L', L'', L'''; M', M'', M'''; N', N'', N''' les coefficients *constants* de Ω', Ω'', Ω''' dans les trois valeurs précédentes, elles s'offriront sous cette forme plus simple,

$$x - x' = L'\Omega' + L''\Omega'' + L'''\Omega''',$$
$$y - y' = M'\Omega' + M''\Omega'' + M'''\Omega'''.$$
$$z - z' = N'\Omega' + N''\Omega'' + N'''\Omega''',$$

Mais d'après ce que nous venons de dire,

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = X^2;$$

donc aussi,

$$(S)\ldots\quad \left.\begin{array}{l} (L'\Omega' + L''\Omega'' + L'''\Omega''')^2 \\ + (M'\Omega' + M''\Omega'' + M'''\Omega''')^2 \\ + (N'\Omega' + N''\Omega'' + N'''\Omega''')^2 \end{array}\right\} = X^2.$$

Si maintenant nous nous rappelons que Ω', Ω'', Ω''' sont des fonctions linéaires de x, y, z de la forme

$$\Omega' = X(a'x + b'y + c'z),$$

nous verrons que l'équation précédente, toute délivrée des x', y', z'; x'', etc., ne contiendra plus que x, y, z et des constantes; de plus, cette équation étant du second degré en Ω', Ω'', Ω''', le sera pareillement en x, y, z; et de même, comme cette équation est homogène en Ω', Ω'', Ω''', elle le sera pareillement en x, y, z, et ne contiendra que les quarrés, ou les produits deux à deux, de ces coordonnées.

Donc enfin, la surface engendrée par le point x, y, z, arbitrairement pris sur la droite mobile, est une surface du second degré, dont le centre est à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire, à l'intersection des trois plans directeurs.

Si nous développons l'équation (S) de cette surface, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} (L'^2 + M'^2 + N'^2)\,\Omega'^2 + 2\,(L'L'' + M'M'' + N'N'')\,\Omega'\Omega'' \\ + (L''^2 + M''^2 + N''^2)\,\Omega''^2 + 2\,(L''L''' + M''M''' + N''N''')\,\Omega''\Omega''' \\ + (L'''^2 + M'''^2 + N'''^2)\,\Omega'''^2 + 2\,(L'''L' + M'''M' + N'''N')\,\Omega'''\Omega' \end{array}\right\} = X^2.$$

Lorsque dans cette équation, nous substituerons pour Ω', Ω'', Ω''' leur valeur en x, y, z, en cherchant seulement le terme qui multiplie $2xy$, nous aurons

$$(L'^2 + M'^2 + N'^2)\,a'b' + (L'L'' + M'M'' + N'N'')\,(a'b'' + a''b'),$$
$$(L''^2 + M''^2 + N''^2)\,a''b'' + (L''L''' + M''M''' + N''N''')\,(a''b''' + a'''b''),$$
$$(L'''^2 + M'''^2 + N'''^2)\,a'''b''' + (L'''L' + M'''M' + N'''N')\,(a'''b' + a'b''').$$

Changeant ensuite a en c, puis b en c, nous aurions les coefficients de $2yz$, $2xz$.

44

Vme MÉMOIRE.

Si donc on voulait que la surface eût pour plans principaux les plans coordonnés, il suffirait d'égaler à zéro ces trois coefficients de xy, yz et xz.

Observons maintenant que des neuf constantes arbitraires a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''' qui déterminent la position des plans directeurs, trois peuvent être égales à l'unité, sans pour cela nuire en rien à la généralité de la question. Donc il en reste encore six dont on peut disposer; par conséquent la condition précédente en laisserait encore trois arbitraires. D'où résulte ce théorême que nous avions démontré par la géométrie seulement dans le Mémoire déjà cité. (Journal de l'École Polytechnique, tome VII, cahier XIV.)

« Pour une même surface donnée du second degré, il existe une infinité de » systêmes différents de plans directeurs à l'aide desquels elle peut être décrite par » un point placé sur une droite mobile convenable. »

Et comme les relations de ces plans directeurs laissent encore dans leur détermination trois constantes arbitraires, on peut disposer de trois données arbitraires dans la fixation d'un systême quelconque de ces plans.

On pourrait pousser plus loin ces considérations; mais comme les calculs où nous serions entraînés commencent à devenir compliqués, nous croyons devoir, pour le moment, nous contenter de la démonstration générale que nous venons de donner.

FIN DES NOTES DU Vme MÉMOIRE, ET DE LA SECONDE ET DERNIÈRE SECTION DE LA THÉORIE.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS

LA THÉORIE DE LA COURBURE ET DE L'OSCULATION DES SURFACES.

PREMIÈRE SECTION.

De la forme des surfaces, à partir de chacun de leurs points.

PREMIER MÉMOIRE. — GÉOMÉTRIE PURE.

§. Ier. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

§ II. — DE L'OSCULATION DES SURFACES.

SECOND MÉMOIRE. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

IIme MÉMOIRE.

Spécialement consacré à la théorie des tangentes conjuguées.

§ Ier. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CONTACTS DES LIGNES ET DES SURFACES.

§ II. — THÉORIE DES TANGENTES CONJUGUÉES. IIme MÉMOIRE.

NOTES PRINCIPALES DU SECOND MÉMOIRE.

TROISIÈME MÉMOIRE. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

IIIme MÉMOIRE.

SUITE DE LA THÉORIE DES TANGENTES CONJUGUÉES. — DE L'INDICATRICE.

NOTES PRINCIPALES DU TROISIÈME MÉMOIRE.

SUPPLÉMENT

AU PARAGRAPHE PREMIER DU SECOND MÉMOIRE, ARTICLE IV, PAGE 83.

IVme MÉMOIRE.

SECONDE SECTION.

QUATRIÈME MÉMOIRE. — GÉOMÉTRIE PURE.

CINQUIÈME MÉMOIRE. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Théorie des surfaces trajectoires orthogonales, appliquée à la détermination des lignes de courbure.

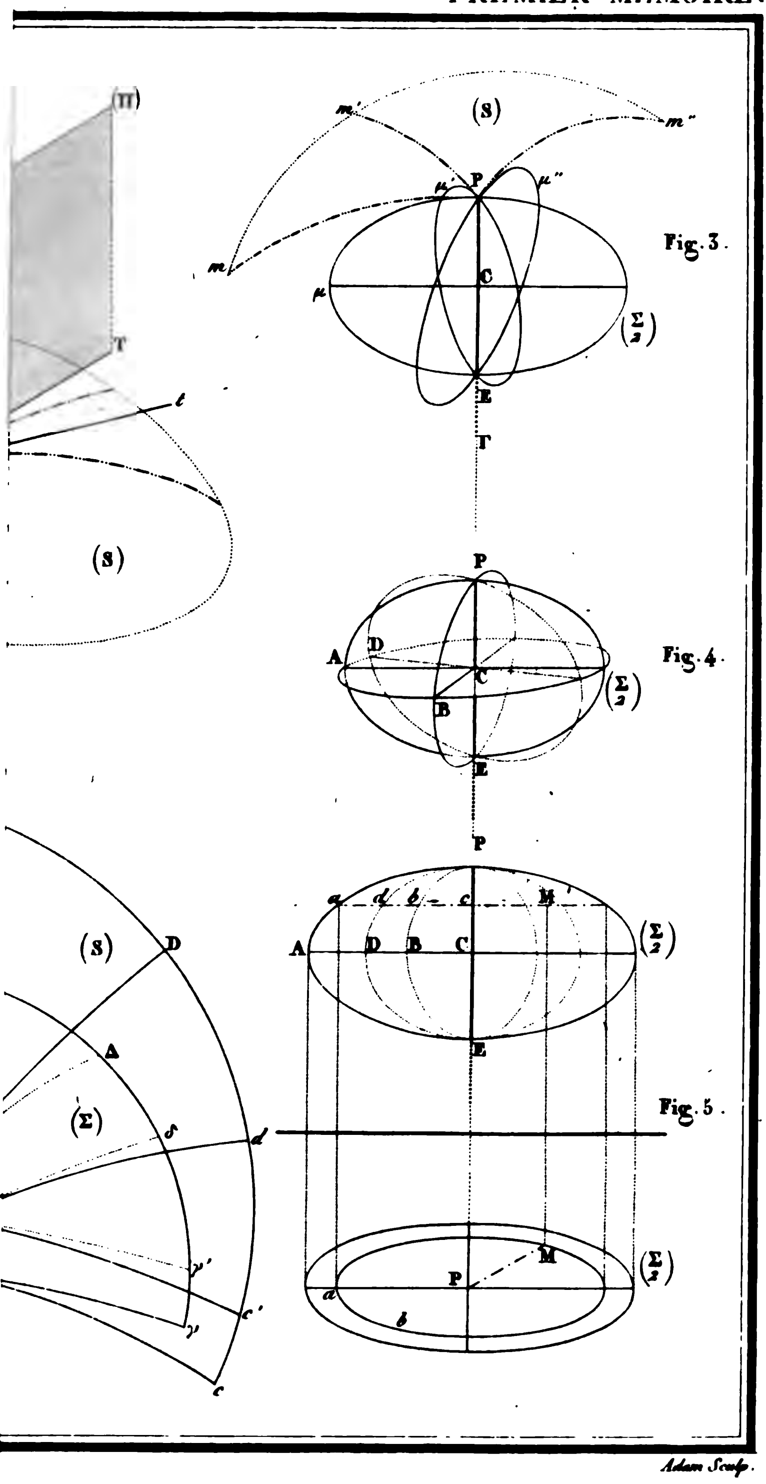
§ Ier. DES SURFACES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DU SECOND DEGRÉ.

NOTES PRINCIPALES DU CINQUIÈME MÉMOIRE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE SECTION ET DE LA THÉORIE.

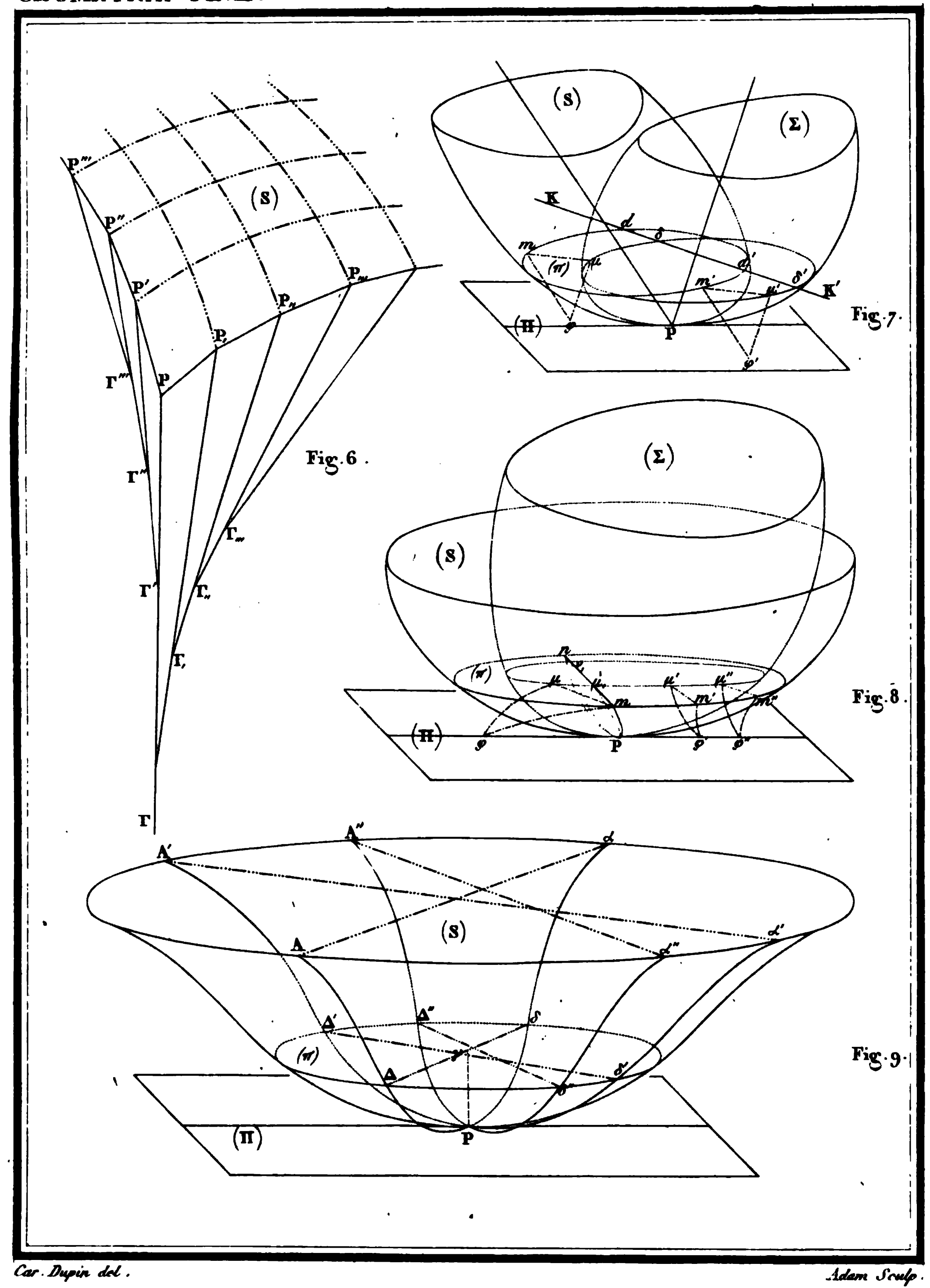
ERRATA.

Pag. 13, fig. 24, *ajoutez* fig. 5.
16 4, fig. 5, *lisez* 6.
19 15, *à un plan*, lisez *à une droite.*
23 30, μP_{ν}, *lisez* $\mu_{\prime} P_{\nu\prime}$.
24 31, en P, au plan P, *lis.* à P, au plan (Π).
26 14, normales, *ajoutez* ou non.
41 20, à P, *lisez* à p.
61 18, Ct, *lis.* CT.
69 art. II, fig. 1, IIme Mémoire.
72 28, $+\chi$, lisez $+\chi'$.
79, 4 et 5, $-h$, $+h$, lisez $+h$, $-h$.
89 29, Z, lisez dZ.
97 13, 3e — 2e, *lisez* 1er — 2e.
99 18, $1-p^2+q^2$, lisez $1+p^2+q^2$.
103 25, dénom. $s+s\psi$, $t+s\varphi$, *lis.* $r+s\psi$, $r+s\varphi$.
104 10, $a.l.a^2\ldots l.23.-s'^2)$, lisez $-s')^2$.
105 22, Art. V, *lisez* IV.
115 5, somme, *lis.* demi-somme.
126 23, $1+q^3$, *lisez* $1+q^2$.
128 5, $1+p^2 : 1+q^2$, lisez $1+q^2 : 1+p^2$.
135 14, ( ), *lis.* [ ] ... Art. VII, *lisez* VIII.
141 23, la valeur, *lisez* l'action.
169 3, les lig. *aj.* de $>$ au lieu des lig. de $<$.
174 8, ABC, *lisez* 4BC.
176 15, $+(A-D)$, *lisez* $-(A-D)$.
184 9, se pliera sur, *lisez* touchera d'abord.
191 22, y', lisez y.
198 16, intégrale, *aj.* sous forme explicite.
204 3, $2pqs$, lisez $-2pqs$.
207 2, ρ^2, lisez ω^2.
218 17, $\varphi(x, y, z)$, *lisez* $\varphi(x, y, z, a)=0$.
221 9, ses, *lisez* les.
Id. 15, de la courbe, *aj.* d'intersection.
237 4, lignes, *lis.* signes : atteindra, *aj.* n'.
243 24, lisez $E\varepsilon\varepsilon'E$, $E'\varepsilon'\varepsilon''E'$, $E''\varepsilon''\varepsilon'''E''$.
247 4, projections, *lisez* trajectoires. 248, *aj.* fig. 6.
254 30, (1, 3), *lisez* [1, 3].
256 20, $(S_2)''$, $(S_3)'''$, *lisez* $(S_1)''$, $(S_1)'''$.
259 15, $[\sigma_3]$, *lisez* $[\sigma_2]$.
294 29, la somme des, *aj.* produits des
308 Art. V, *lisez* IV.
318 24, A, A, *lisez* A', A'.

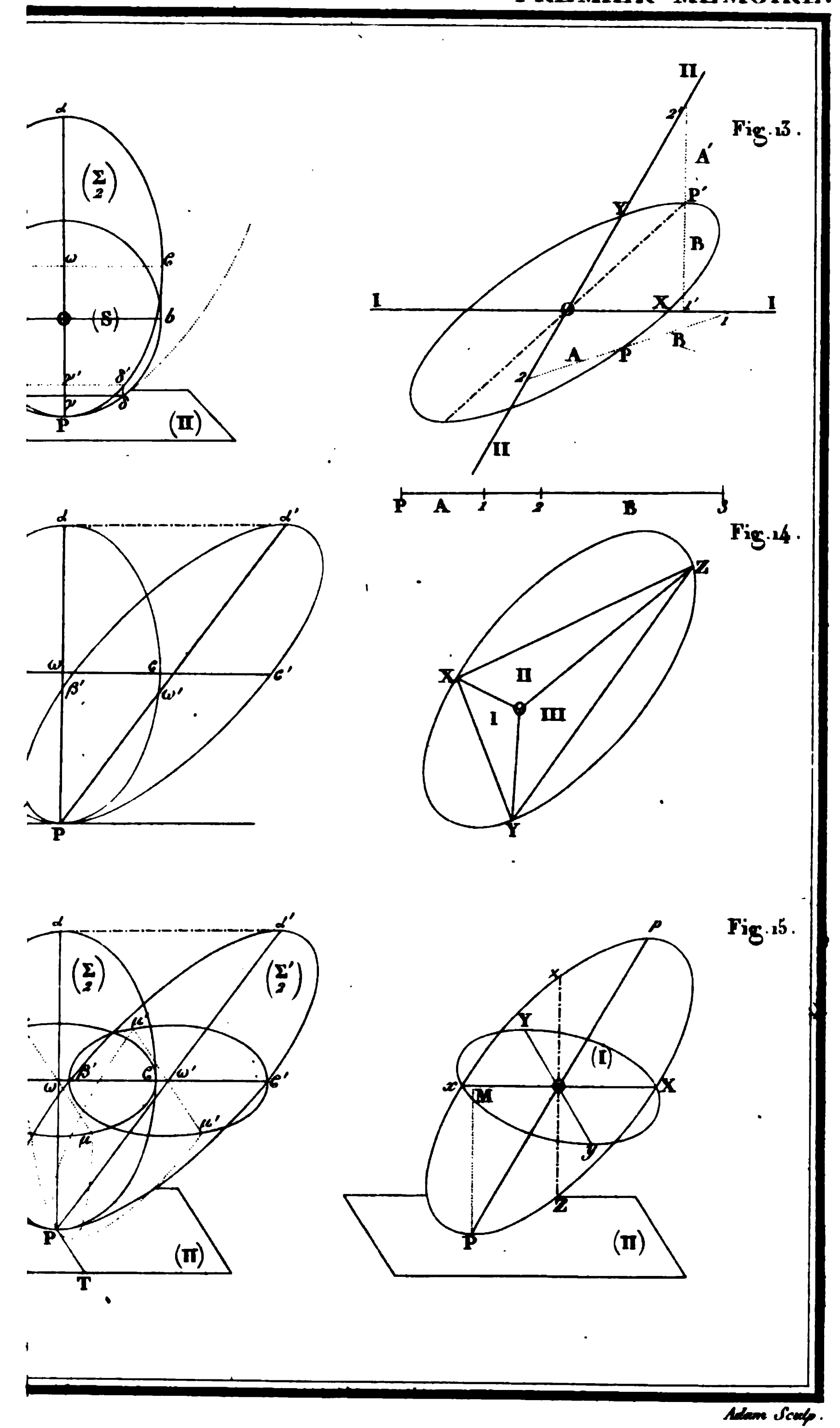


(S)
m'
m''
μ'
P
μ''
Fig. 3.
m
C
μ
(Σ/2)
E
T
(Π)
T
t
(S)
P
Fig. 4.
A
D
C
(Σ/2)
B
E
P
a
d
b
c
M
(Σ/2)
A
D
B
C
(S)
D
Δ
E
Fig. 5.
(Σ)
δ
d
γ'
γ
c'
c
M
(Σ/2)
P
a
b

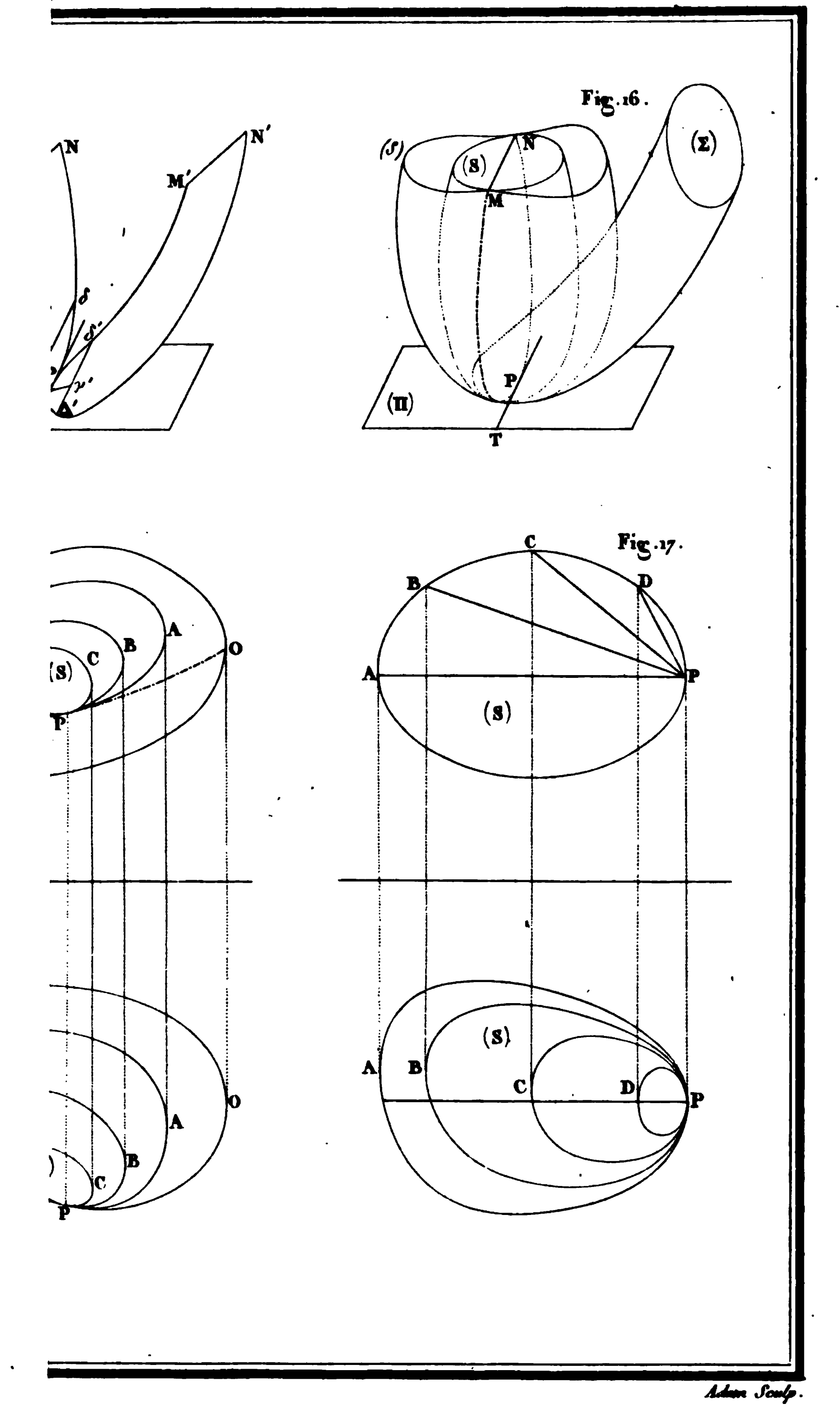
Adam Sculp.



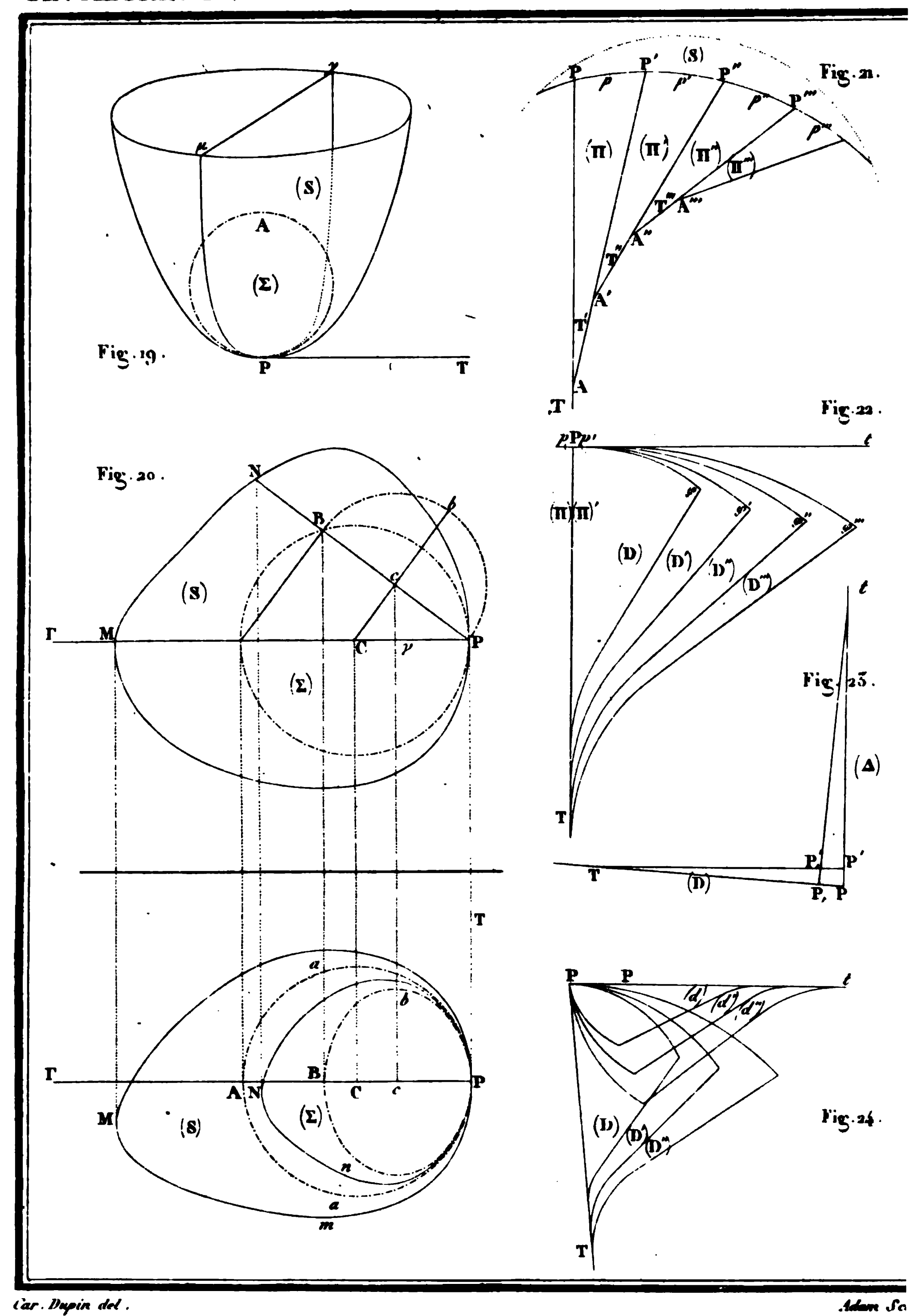
Car. Dupin del. Adam Sculp.



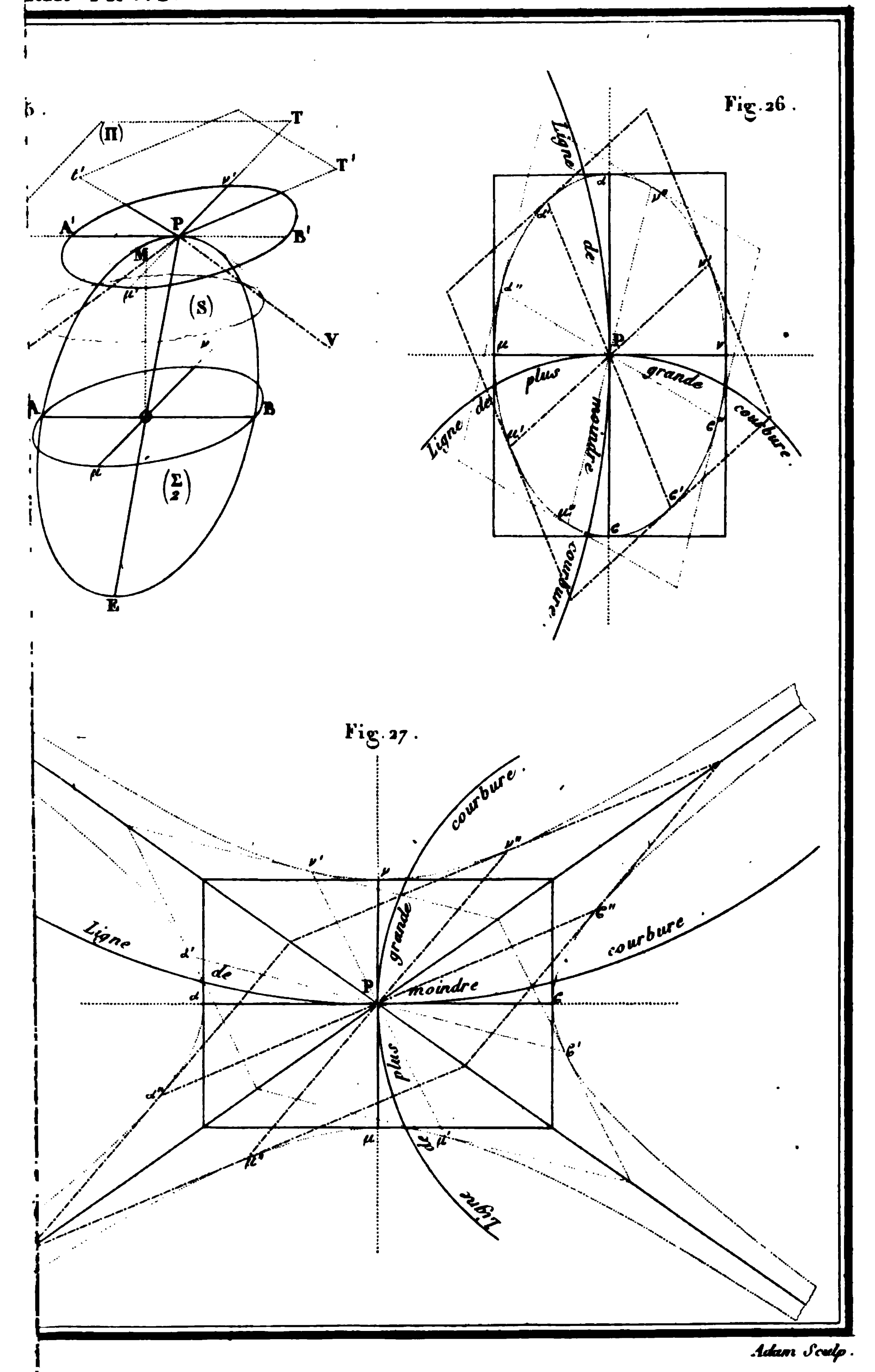
Adam Sculp.



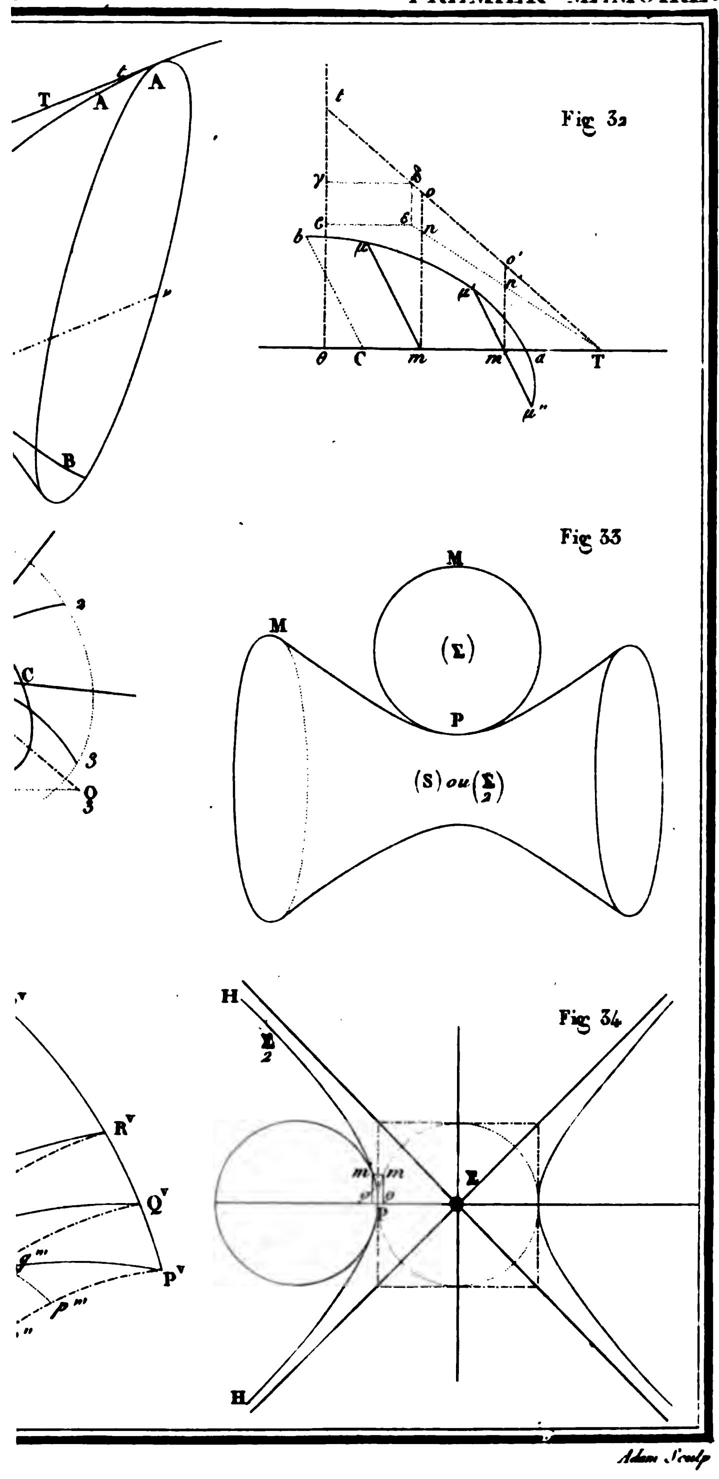
Adam Sculp.

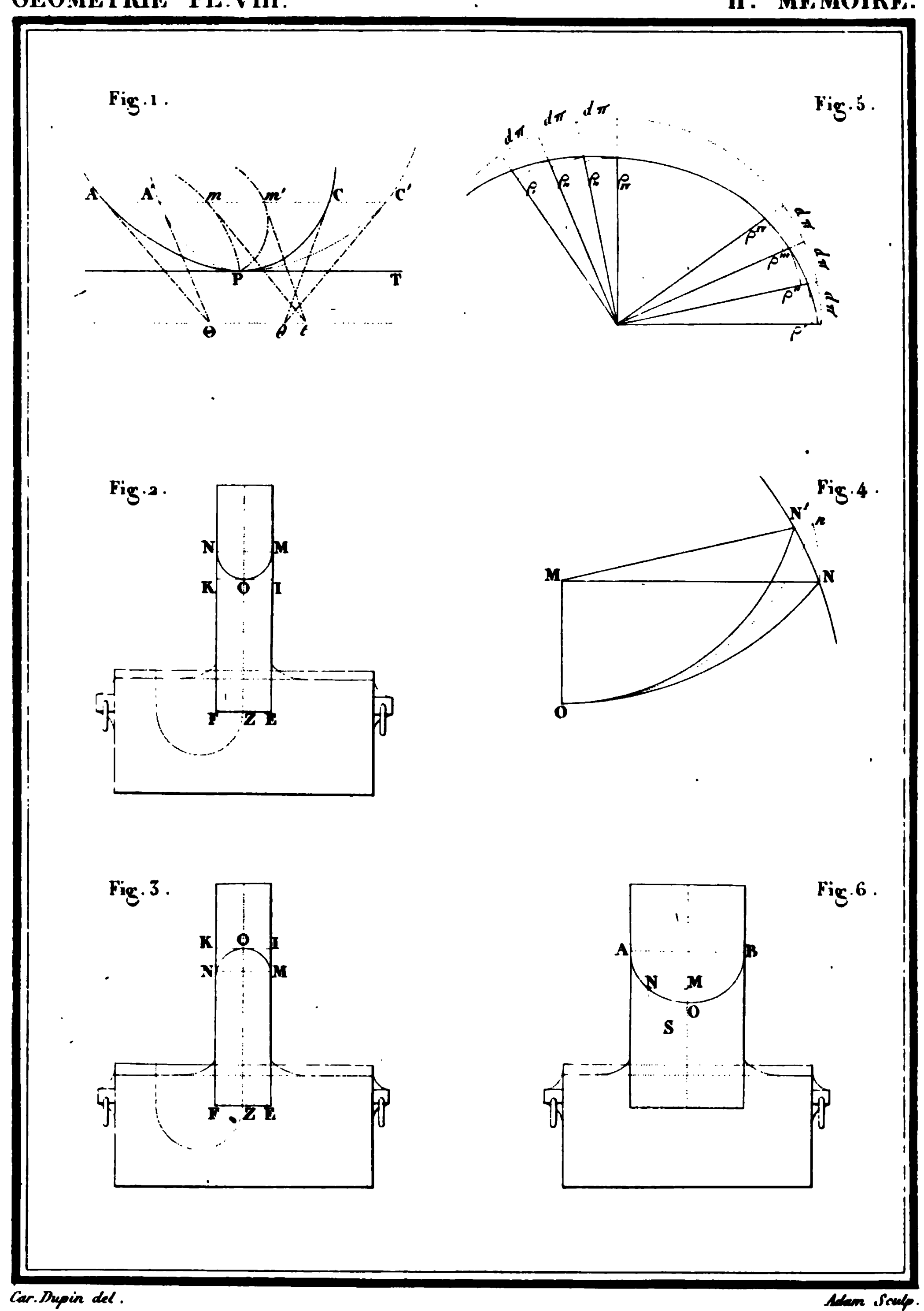


Car. Dupin del. Adam Sc


Fig. 26.
Ligne de moindre courbure
Ligne de plus grande courbure
Fig. 27.
Ligne de plus grande courbure
Ligne de moindre courbure

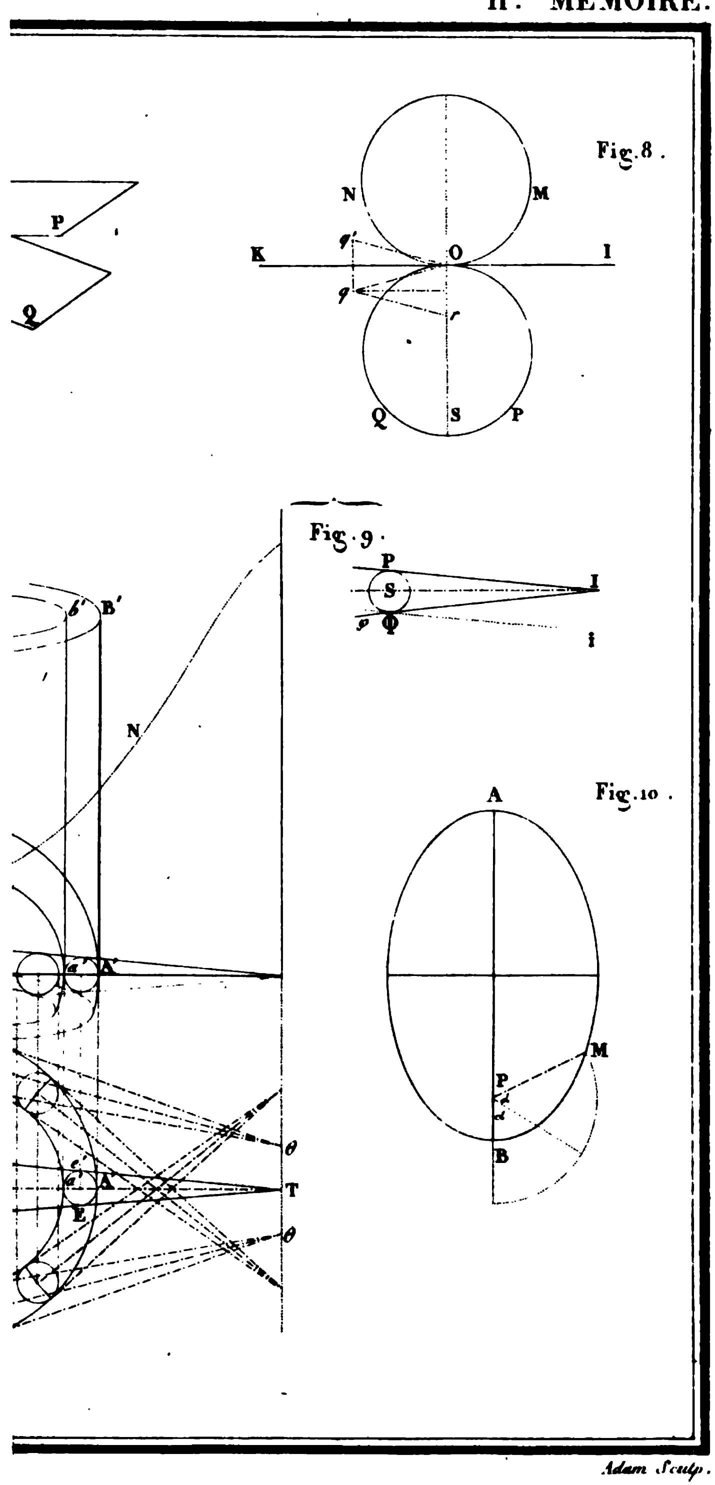
Adam Sculp.


Fig. 32
t
γ
δ
o
ε
ϵ
n
b
μ
o'
n'
μ'
θ
C
m
m'
a
T
μ''
Fig. 33
M
M
(Σ)
P
(S) ou (Σ/2)
Fig. 34
H
Σ/2
m
m
o
o
P
Σ
H
T
A
A
B
C
3
Q
3
R^v
Q^v
P^v
p'''
Adam Sculp

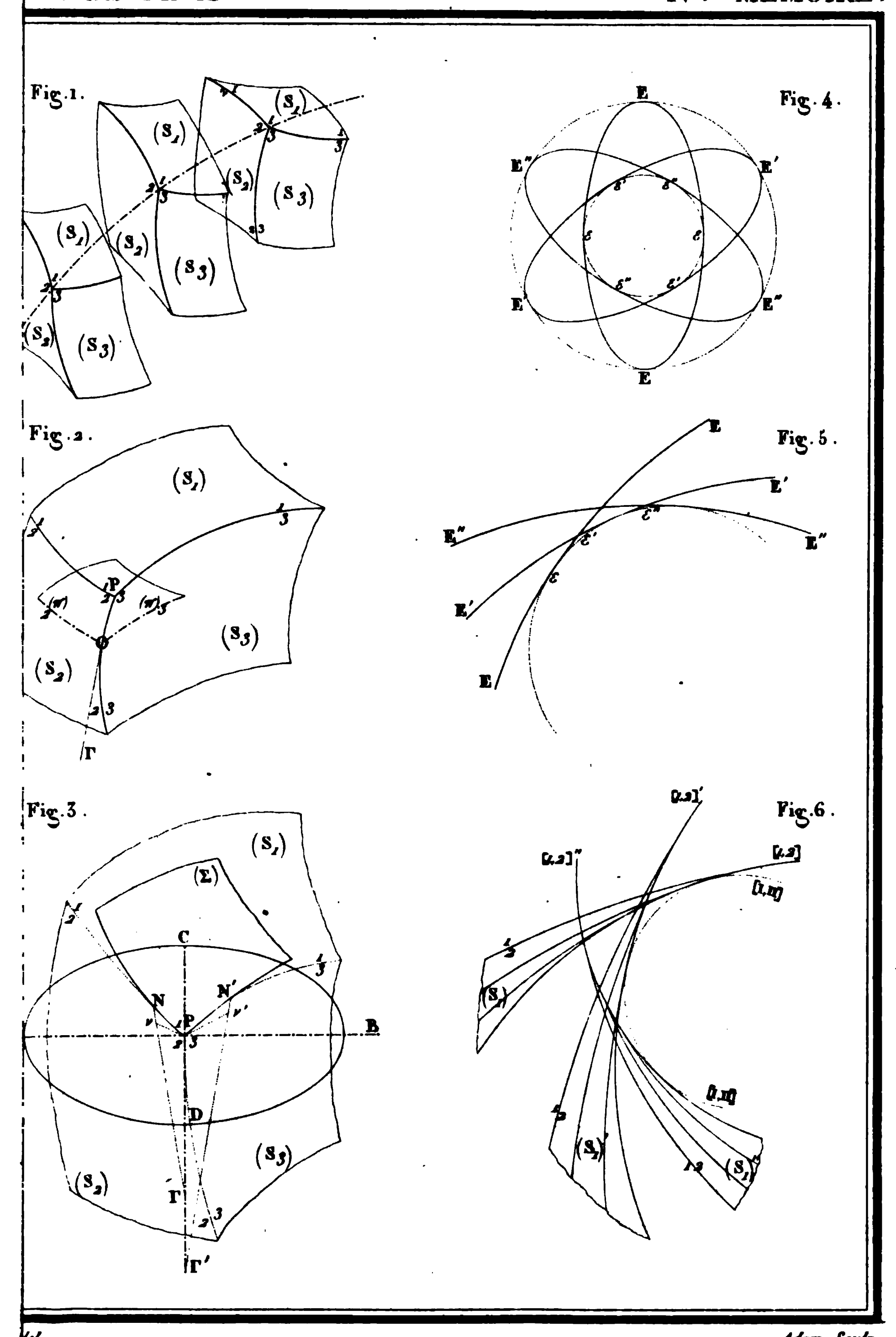


Car. Dupin del.

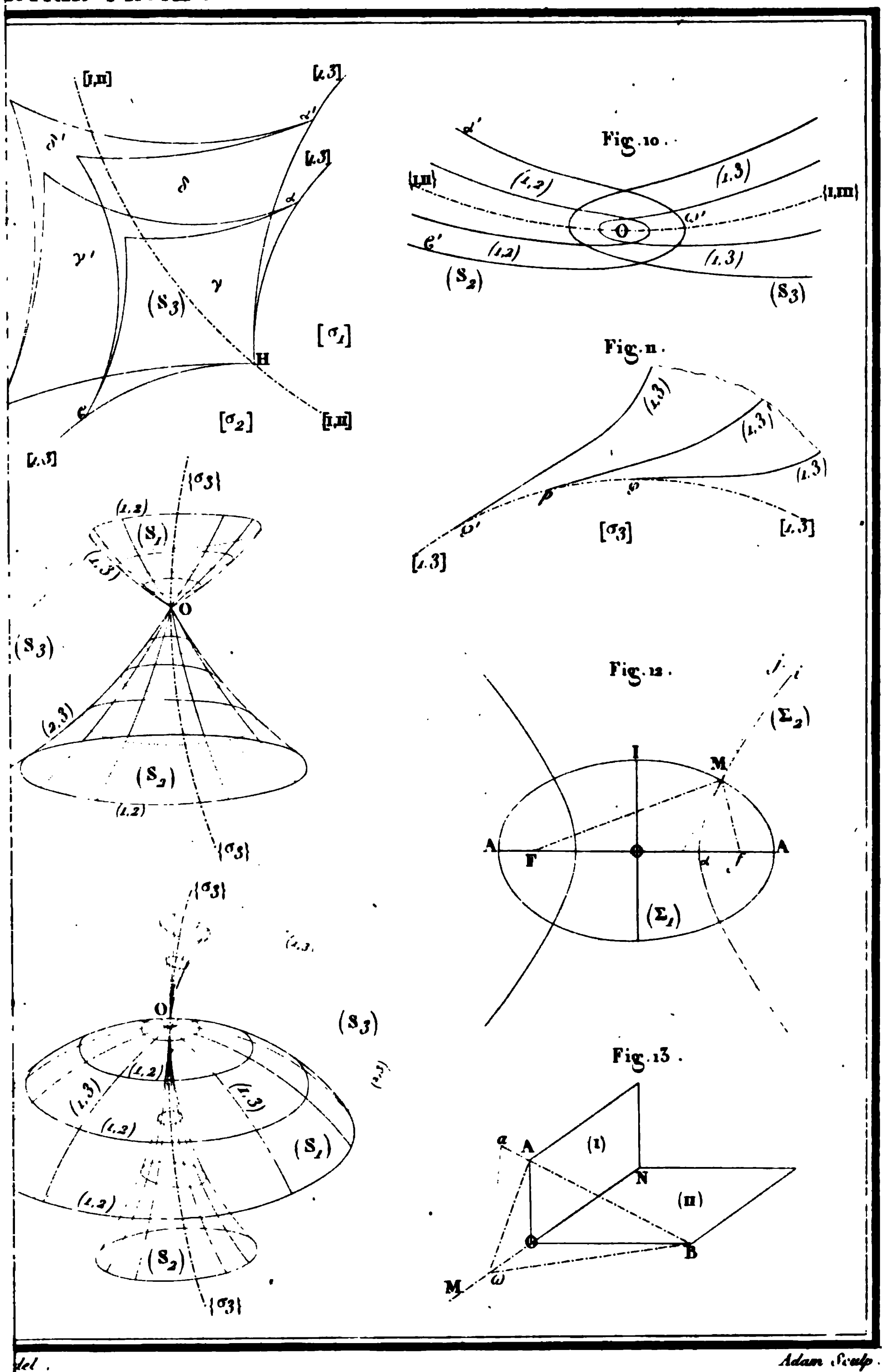
Adam Sculp.



Adam Sculp.



del. Adam Sculp.



del . Adam Sculp .

